

# Kapitola 1

## Úvod

Nejrozšířenější metodou analýzy poddajných těles a soustav v technických oborech je dnes metoda konečných prvků (MKP). Jednoznačně dominuje ve sféře průmyslu, ale nezanedbatelný podíl má i v aplikovaném a teoretickém výzkumu. K MKP se vztahuje tak velké množství literatury – každoročně je publikována řada knih, článků i referátů, že orientovat se v ní je velmi obtížné. V předkládané práci se autor pokusil nejen o prezentaci, ale i o utřídění a zobecnění zkušeností, které získal při aplikaci MKP na praktické problémy i v úlohách z akademického prostředí.

### 1.1 Matematický základ MKP.

Z matematického úhlu pohledu je metoda konečných prvků variační metodou. Řešení soustavy lineárních (parciálních) diferenciálních rovnic (LPDR) je konstruováno jako lineární kombinace bázevých funkcí. To lze interpretovat tak, že úloha najít řešení ve tvaru spojitě funkce byla převedena na úlohu najít diskrétní množinu reálných čísel – koeficientů uvedené lineární kombinace. Proto se tomuto procesu říká **diskretizace**. V praktických případech se často pracuje s konečným počtem bázevých funkcí a řešení je proto pouze přibližné. Kritéria pro stanovení hledaných koeficientů vycházejí z požadavku, aby po dosazení přibližného řešení – lineární kombinace bázevých funkcí s těmito koeficienty – do řešené soustavy LPDR byla tato soustava splněna co nejpřesněji. Jde o to, vyjádřit společnou míru nepřesnosti mnoha koeficientů jedním číslem – skalárem. Tyto postupy se obecně označují jako **variační metody**. V klasické mechanice poddajných těles se prosadily zejména variační principy využívající energie vnitřních a vnějších sil – **princip virtuálních posuvů** (Lagrangeův variační princip), princip virtuálních sil (Castiglianův variační princip) a jim odpovídající principy minima celkové potenciální energie a minima komplementární potenciální energie. Tyto a další přístupy byly známy a používány dlouho před vznikem MKP. Uvedené variační principy ale obvykle vyžadují, aby libovolná lineární kombinace bázevých funkcí splňovala homogenní okrajové podmínky buď v posuvech (Lagrangeův princip) nebo v napětích (Castiglianův princip). Toho lze více či méně snadno dosáhnout u těles se speciálních geometrií, ale u těles obecného tvaru se tento požadavek zdá nesplnitelný.

Průlom v této oblasti přinesla až metoda konečných prvků, která vznikla jako *inženýrská metoda* vycházející z mechaniky těles a soustav. Složitě těleso (například rám) je rozloženo na mnoho jednodušších podtěl (např. přímých nosníků). Deformační odezva podtěl na zatížení je popsána lineárními vztahy mezi konečným počtem posuvů (a na-

točení) a sil (a silových dvojic), typicky s využitím maticového aparátu. Aplikace vazeb mezi podtělesy vede přímo k sestavení (maticových) rovnic popisujících odezvu celého tělesa. Při aplikaci na rovinné kontinuum je těleso pokryto konečným počtem konečně velkých podoblastí – **konečnými prvky**. Deformační odezva (posuv) v každém prvku je dána konečným počtem parametrů a odezvu tělesa lze získat aplikací vazbových podmínek mezi elementy, které mimo jiné musí zajistit spojitost posuvu. Aby hodnoty parametrů určujících posuv mohly být vyšetřeny například na základě principu minima celkové potenciální energie, musí jimi určený posuv splnit apriorní okrajové podmínky. U klasických bází (Fourierovské, Taylorovské, ...) to je problém, protože každá bázová funkce je obecně nenulová v celém tělese a tudíž ovlivňuje posuv všude. Naproti tomu, díky rozdělení tělesa na elementy, mají neznámé parametry *omezený dosah* a proto lze ty, které ovlivňují posuv tam, kde je zadána okrajová podmínka, považovat za dané a za neznámé brát ty ostatní. Tento způsob diskretizace kontinua byl později matematiky interpretován jako speciální konstrukce bázových funkcí s omezeným dosahem. Je společný všem přístupům, které jsou označovány jako metoda konečných prvků a je obecně použitelný pro přibližné variační řešení soustav LPDR nejen v mechanice poddajných těles, ale i v jiných oborech.

## 1.2 Implementační aspekty.

MKP je velmi úzce provázána s výpočetní technikou a softwarovým inženýrstvím. Její robustnost a univerzalita je podmíněna nebývalým rozsahem zpracovávaných dat a nároky na počet operací. Použití MKP v *ručním* (počítačem nepodporovaném) výpočtu je prakticky nemožné. Programové aparáty metody konečných prvků mají obvykle dva základní typy programů:

- Program provádějící vlastní výpočet – *numerické jádro*
- Programy pro přípravu vstupních dat a zpracování výsledků – *preprocesor a postprocesor*

Hlavními požadavky kladenými na numerická jádra jsou: vybavenost, spolehlivost, robustnost, výkon:

- **Vybavenost** vyjadřuje požadavek uživatele, aby v programu byly implementovány úlohy, které uživatel potřebuje. Tento požadavek bývá naplňován buď snahou po maximální univerzalitě, nebo naopak úzkou specializací.
- **Spolehlivost** znamená, že všechny partie programu jsou ověřovány a testovány a jsou fyzikálně i matematicky správně implementovány. Jedním z atributů spolehlivosti je dlouhodobý vývoj a zpětná vazba mezi uživateli a výrobcem programu. Praktická zkušenost ukazuje, že při dobrém počátečním návrhu lze numerická jádra udržovat a vyvíjet desítky let. Většina implementovaných procedur je v takovém produktu verifikována nejen u výrobce, ale také desítkami a stovkami výpočtů u uživatelů programu.
- **Robustnost** se míní na jedné straně kvalita samotného kódu, minimalizace výskytu programátorských chyb, na druhé straně jasný a srozumitelný návrh rozhraní, který minimalizuje nebezpečí nedorozumění mezi programátorem a uživatelem, srozumitelný systém varování a chybových hlášení, dostatečně podrobný protokol o úloze a v neposlední řadě kvalitní dokumentace.

- **Výkon** je prvořadým požadavkem, ale neměl by být dosahován za cenu kompromisů v plnění předchozích tří. U MKP roste náročnost výpočtu zhruba s kvadrátem až třetí mocninou rozsahu úlohy, takže výkon programu spolu s výkonem použité výpočetní techniky jsou často limitujícím faktorem, který určuje koncepci MKP modelování.

Požadavky na pre–postprocesory jsou různorodější a více závislé na oboru a typu úlohy. Ve strojírenských aplikacích MKP je v současnosti standardem **podpora geometrického modelování a automatizované generování MKP sítě** do geometrických šablon. Běžným požadavkem jsou **importy** geometrických modelů z CAD programů. V některých případech dochází k užšímu propojování CAD programů s MKP preprocesory i numerickými jádry, takže rozdíly mezi CAD programy a MKP se zmenšují<sup>1</sup>. V oblasti postprocesingu je samozřejmým požadavkem vykreslování výsledných polí v různých variantách barevně odstupňovaných isoploch, generování animací vývoje deformace i ostatních veličin, vykreslování závislostí výsledných veličin na čase v daném místě nebo na poloze podél definované křivky do grafů. Standardem jsou transformace složek vypočtených vektorových a tensorových polí do zvolených souřadných systémů<sup>2</sup>. Zpracování vypočtených dat např. z hlediska únavy je obvykle řešeno mimo rámec standardního postprocesoru, ale řada programových aparátů MKP nabízí dobře integrované moduly.

V současnosti nabývá na významu otázka *rozdělení kompetencí* mezi numerickým jádrem, preprocesorem a postprocesorem. Stále širší používání adaptivních technik, které řeší např. tradiční problém Lagrangeovské formulace rovnic mechaniky kontinua – *roztvárané* elementy v důsledku velkých přetvoření těles–přesíťováním v průběhu výpočtu, vyžaduje, aby se buď generátory sítě staly i součástí numerického jádra nebo, aby úloha na základní úrovni byla spravována algoritmem, který zapojuje střídavě jádro a preprocessor či postprocessor. Jakkoli se tato otázka zdá být spíše technická než základní, může její řešení významně ovlivnit schopnost programového aparátu vyrovnat se s budoucími požadavky, jako je například kooperace s jinými programy při řešení svázaných úloh proudění a mechaniky poddajných těles.

Perspektivním řešením se dnes zdá být koncepce kvalitně navrženého aplikačního rozhraní, nad kterým řídí chod úlohy skript. Takováto koncepce je dlouhodobě implementována v programovém aparátu ANSYS a v posledních letech ji velmi úspěšně využívá i ABAQUS<sup>3</sup>

Dnes existují programy aplikující metodu konečných prvků v různých formách. Z hlediska dostupnosti a podpory můžeme hovořit o programech **komerčních**, které vyvíjejí a prodávají specializované firmy pro relativně široké spektrum uživatelů v daném oboru, programy **firemních**, které vznikly v jednotlivých firmách (často v době, kdy vhodný komerční produkt nebyl dostupný) a programy **veřejných**, které typicky vznikají na univerzitách jako otevřené experimentální kódy. Vzhledem k vysoké kvalitě, širokému spektru

<sup>1</sup>V současné etapě existují MKP preprocesory vybavené geometrickým modelářem podporujícím hierarchickou výstavbu modelu jako sestavy jednotlivých částí (samostatných těles), která jsou popsána sledem operací a podporují dědičnost, možnost potlačovat a obnovovat jednotlivé vlastnosti a další vymoženosti běžné v CAD. Řada CAD programů má moduly pro generování MKP sítě, zadávání okrajových podmínek a generování vstupních souborů do vlastních výpočtových programů, které často jsou také součástí CAD programu.

<sup>2</sup>... s respektováním charakteru modelu. Např. u skořepin jsou přípustné pouze transformace v tečných rovinách.

<sup>3</sup>Program ABAQUS neměl do roku 2000 vlastní preprocessor a využíval řadu samostatných produktů.

řešitelných problémů a relativní cenové dostupnosti komerčních programů dnes vývoj nových firemních kódů téměř neexistuje<sup>4</sup>.

MKP programy mohou pokrývat řešení různých matematických, fyzikálních i technických úloh v mnoha oborech. Z tohoto hlediska můžeme jednotlivé programové aparáty rozdělit na

1. **obecné matematické programy.** Typickým představitelem je např. program COMSOL (dříve FEMLAB) (<http://www.femlab.co.nz/>), který je úzce provázán s programem MATLAB a poskytuje uživateli nástroje pro řešení soustavy parciálních diferenciálních rovnic metodou konečných prvků.
2. **programy zaměřené na konkrétní třídu fyzikálních úloh.**

- Obecné MKP programy pro aplikace v technice. Ty zahrnují úlohy mechaniky poddajných těles, termomechaniky, difuze, úlohy o pohybu elektrického náboje, řešení elektromagnetického pole a různé kombinace svázaných úloh (např. svázaná úloha vedení tepla a mechaniky poddajných těles). Vyznačují se rozsáhlou knihovnou elementů, která pokrývá diskretizaci 1D, 2D i 3D kontinuí, skořepinové a nosníkové strukturní elementy, elementy se soustředěnými parametry. Implementované materiálové modely pokrývají široké spektrum technických materiálů od ocelí a kovů přes plasty, kompozity a pryže ke stavebním materiálům jako je beton, až po geologické materiály jako jsou horniny jejichž chování závisí na obsahu vody.
- Specializované MKP programy jsou zaměřeny na řešení komplexních úloh, které vyžadují speciální znalosti a zkušenosti a v neposlední řadě i v obecných preprocesorech pracné zadávání vstupních dat. Typickými příklady jsou programy pro simulaci nárazů dopravních prostředků (*crashů*), technologických procesů – tváření, svařování . . . , simulaci výbuchů a destrukcí (odstřelů) a další. Cena těchto programů spočívá především v databázi znalostí, postupů, materiálových dat, která uživateli umožňuje efektivně provádět potřebné simulace s minimálními nároky na vlastní výzkum a vývoj.

---

<sup>4</sup>Výjimkou je např. firma Ricardo, která se zabývá řešením inženýrských problémů zejména v automobilovém průmyslu. Tato firma vyvinula a udržuje a rozvíjí vlastní funkční MKP kód, který používá pro implementaci ne zcela typických úloh.

# Kapitola 2

## Klasifikace prostředků a postupů MKP.

Mnozí uživatelé MKP<sup>1</sup> jsou přesvědčeni, že na rozdíl od konstruktérů, kteří spoléhají „pouze“ na cit a intuici, používají výpočtáři ve své profesi matematicky exaktní přístupy. To je nebezpečná iluze. Pouze vlastní výpočet je matematickým strojem, který pracuje víceméně exaktně. Tvorba matematických modelů systémů poddajných těles je náročná činnost, při které se výpočtář opírá v první řadě o názor, zkušenost, intuici a cit. Při tom má k dispozici omezenou, ale relativně širokou škálu prostředků, které lze s jistými omezeními kombinovat. Tato výchozí situace se velmi podobá situaci konstruktéra. Konstruktér se nejprve seznamuje s typickými „částmi strojů“, učí se řešit jednoduché standardní situace a postupně zvládá stále složitější konstrukce. Výpočtář se nejprve seznámí s fyzikálním a matematickým základem metody a pak si osvojuje modelování jednotlivých těles s využitím klasických (1,2 a 3D) kontinuí, deskových, skořepinových a nosníkových elementů, modeluje několik těles s vazbami, řeší nelineární úlohy, dynamiku a nakonec se naučí modelovat celá zařízení (soustavy těles) a provádět simulace jejich provozu. Klasifikace dostupných prostředků MKP je nutným, nikoli však postačujícím předpokladem jejich správného použití v praxi.

### 2.1 MKP a modelování.

#### 2.1.1 Modelování.

Matematik by modelování nazval zobrazením reálného systému **na** modelový systém a zpět. „Reálným systémem“ se zde míní soubor vybraných reálných objektů a vazeb mezi nimi (zbytek světa se nazývá okolím, a to bývá obvykle popisováno pouze interakcemi se systémem), modelový systém je souborem modelových objektů a (modelových) vazeb. Cílem modelování je popsat nebo předpovědět vzájemné interakce objektů reálného systému, při působení okolí, prostřednictvím zkoumání modelu. Modelové objekty mohou být obecně jak fyzické, tak abstraktní:

**Fyzické modelové objekty** a jejich interakce jsou **totožné s reálnými**. Pokud i interakce s okolím je autentická, hovoříme o zkoumání světa **pozorováním**. To je základní způsob poznávání a např. v antice byl prakticky jediným. Jestliže systém vědomě podro-

---

<sup>1</sup>Nejen přímí uživatelé, ale i zadavatelé výpočtů

bíme určitým vybraným vlivům okolí, popřípadě do něj implementujeme objekty, které neovlivní příliš jeho chování, ale zkvalitní pozorování, mluvíme o **experimentu**.

**Modelové objekty** jsou fyzické, ale ne totožné s reálnými. Takové modely jsou postaveny na více, či méně ověřených předpokladech a zjednodušeních. Jde např. o fyzikální a geometrickou **podobnost**. Typickými příklady jsou zmenšené modely. Dalším typem jsou **analogické modely**, které využívají analogií mezi různými fyzikálními jevy. Např. hydraulickou soustavu lze modelovat jako elektrický systém, ve kterém je průtok zobrazen na proud, tlak na napětí a jednotlivé větve potrubí (přesněji, jejich hydraulické odpory) na elektrické odpory.

**Abstraktní modely** jsou obvykle produktem některé obecné vědy (sociologie, fyzika, mechanika) s podporou matematiky. Abstraktní modely mají často velmi univerzální charakter. Např. koncept kontinua byl v určitých etapách považován za přesný popis hmoty. Podobně je tomu s teorií fluid, která dodnes přetrvává ve fyzice v pojmu teplota. Takto obecné abstraktní modely reality nazýváme často **teoriemi**. V průběhu uplynulých staletí vyprodukovaly vědy řadu obecných abstraktních modelů reality. Ty se zaměřují na modelování specifických interakcí reálných objektů a většinou užívají matematický aparát pro jejich kvantifikaci. Řada z těchto teorií byla překonána, ale přesto se mnohé dále používají vzhledem k dobré shodě s realitou a nenáročnosti na použitý matematický aparát. Takové teorie nevycházejí z vnitřní podstaty reality, ale všímají si jen určitých důsledků jejich **projevů**. Proto se označují jako **fenomenologie**. Typickou vlastností všech fenomenologií je, že se při popisu světa neobejdou bez množství experimentálně stanovených dat. Matematický aparát řady vědeckých teorií umožňuje exaktně pracovat pouze s vybranou třídou modelů, která vede na řešitelné matematické rovnice. Jednoduše řečeno, máme „dobré“ rovnice, ale neumíme je řešit. Východisko z takových situací nabízí **numerická matematika**, kterou lze interpretovat např. tak, že exaktní matematické struktury (rovnice) jsou **modelovány** (zobrazeny na jiné matematické struktury) numericky, řešen je numerický model a výsledky jsou interpretovány v prostoru původního matematického modelu.

Technika, podobně jako věda, je specifickým druhem lidské činnosti. Jejím cílem není poznávat svět, jejím cílem je se světa „zmocnit“. Poznání je v technice „pouhým“ prostředkem k dosahování tohoto cíle. Logika vývoje však vede k tomu, že význam znalostí v technice roste. Důležitou složkou poznávání je získávání zkušeností. Získávání zkušeností vždy bylo a je velmi drahé. Za zkušenosti se platí tím, čeho nikdy není nazbyt – časem. Někdy zkušenosti stojí i zdraví a životy lidí. Modelování představuje velmi efektivní a cílené získávání zkušeností s omezenými náklady i riziky. Modelování se uplatňuje při konstruování, výrobě i verifikaci technických produktů. Typickým projevem modelování technického objektu je pragmatická kombinace různých přístupů podle hesla *účel světí prostředky*. Významnou roli zde hrají ekonomická kritéria. Model by neměl být kvalitnější (a ekonomicky nákladnější), než je nezbytně nutné.

### Mechanické modely.

Ve strojírenství a stavebnictví mají velký význam modely **mechanické**. Abstraktní mechanické modely (dále už jenom *mechanické modely*) vycházejí z fenomenologické teorie – klasické (Newtonovské) mechaniky. V souladu s klasickou mechanikou lze specifikovat obory modelování **podle objektů**:

- Modely (soustav) dokonale tuhých těles

- Modely (soustav) poddajných těles
  - pevné fáze. Typické lagrangeovským popisem pohybu, který sleduje polohu částice. Posuv je spojitý.
    - \* Tělesa jsou modelována jako kontinuum. Mechanika kontinua odděluje modelování geometrie a modelování materiálové odezvy. Vyžaduje model materiálu, který popisuje vztah mezi lokální mírou napjatosti (např. tenzorem napjatosti) a lokální mírou deformace (např. tenzorem deformace). V mechanice kontinua rozlišujeme
      - modely prvního řádu (klasická pružnost)
      - modely linearizované (kritická zatížení při ztrátě stability, kmitání v předepjatém stavu)
      - modely nelineární
    - \* Tělesa jsou modelována soustředěnými parametry – hmotností, tuhostí, tlumením (strukturní modely)
  - tekutin. Typické eulerovským popisem pohybu, který sleduje rychlost v kontrolním objemu. Posuv může být nespojitý.
- Modelování termomechanických dějů.
- Modelování *svázaných* dějů (model poddajného tělesa zatěžovaného teplotním polem)
- Modelování kombinované – např. model mechanické soustavy může současně obsahovat poddajná tělesa modelovaná jako kontinuum, tělesa modelovaná soustředěnými parametry (zjištěnými experimentálně nebo analyticky za zjednodušujících předpokladů) i tělesa dokonale tuhá.

Dále lze modelování klasifikovat na:

- Modelování **stacionárních** dějů. Mechanické systémy podrobené časově neproměnlivým vlivům konvergují po nekonečně dlouhé době k neproměnlivému (ustálenému) stavu. Vzhledem k míře tlumení je v běžných systémech doba, po které je ustáleného stavu prakticky dosaženo, relativně krátká. Řada (mechanických) soustav se často nachází ve stavu statické rovnováhy. Úkolem stacionárních modelů je popsat pouze výsledný (ustálený) stav systému bez ohledu na způsob, kterým ho bylo dosaženo. V této idealizaci nevystupuje čas.
- Modelování obecných **nestacionárních** mechanických dějů. Úkolem nestacionárních modelů je popsat proces –stav systému jako funkci času.

Podle jiného hlediska mohou být modely tříděny na:

- Modely deterministické, ve kterých je vztah mezi příčinou a následkem jednoznačný
- modely stochastické (pravděpodobnostní), podle nichž je každé možné odezvě na danou příčinu přiřazována pravděpodobnost realizace. Stochastické vlastnosti mohou být do modelu vnášeny jako nejistota při popisu materiálu, geometrie i okrajových podmínek.

Z hlediska účelu mohou být mechanické modely, resp. výpočty v technice klasifikovány jako:

- **Návrhové.** Tyto modely slouží k návrhu a ověření vybraných základních parametrů při návrhu technického díla. Typickými parametry jsou namáhání, vlastní frekvence, tuhost. Tyto modely mají obvykle vysokou míru idealizace. Přijatá zjednodušení často umožňují analytické řešení, což je levné a rychlé, ale při počítačovém konstruování se dnes i v této oblasti prosazuje MKP.
- **Kontrolní.** Tyto modely slouží k ověření a průkazu funkčních parametrů technického díla, jehož návrh je už do značné míry propracován. Typickými parametry jsou únosnost, životnost, deformace v provozních režimech, dynamické odezvy na předpisová buzení. Tyto parametry, resp. jejich limity bývají v mnoha oborech stanoveny normami a průkaz jejich hodnot nutnou podmínkou pro schválení provozu. Abstraktní kontrolní modely jsou dnes nejčastěji založeny na MKP a často využívají specializovaný postprocessing, který např. na základě vypočtené závislosti zatížení–napjatost dopočítává pro daný předpokládaný způsob zatěžování dobu do iniciace únavových trhlin.
- **Simulační.** Tyto modely slouží k podrobnému popisu reálných provozních nebo havarijních procesů v technickém díle. Jejich cílem může být návrh, kontrola i poznávání. Je-li například hlavním kritériem přijatelnosti technického díla jeho reálná odezva v havarijním stavu, je vcelku rozumné vytvořit (např. pomocí metody konečných prvků) již ve fázi návrhu jednoduchý simulační model s relativně snadno měnitelnými parametry a ve fázi kontroly pak tento model zpřesnit nebo vytvořit samostatný kontrolní simulační model.

### 2.1.2 Mýty a pověry o MKP.

Z hlediska matematiky představuje metoda konečných prvků (MKP)

- v širším smyslu numerickou metodu řešení (parciálních) diferenciálních rovnic (v kontinuu).
- v užším smyslu jen techniku diskretizace definičního oboru hledaných funkcí (techniku diskretizace kontinua). Vlastní podstatou řešení je pak některá z variačních metod.

V technické praxi se ukázalo, že MKP<sup>2</sup> je velmi silná při řešení úloh mechaniky poddajných těles. V průběhu poslední třetiny dvacátého století se MKP stala téměř monopolním prostředkem numerické analýzy mechanických soustav poddajných těles. Je implementována v řadě inženýrských programových prostředků: v čistě analytických aplikacích (tradiční „velké MKP balíky“ ADINA, NASTRAN, ANSYS, ABAQUS, MARC...), v programech specializovaných na různé konkrétní technické problémy – simulace havárií, simulace technologických procesů (programy řady Pam, např. Pam-Crash, Pam-Stamp...) a konečně i v systémech CAD jako prostředek pro rychlé návrhové výpočty (Pro-Engineer +

---

<sup>2</sup>Rozuměj MKP aplikovaná zejména v deformačních nebo hybridních variantách variačních principů mechaniky.



Pro-mechanika. . .). V posledních dvou případech bývá často vlastní MKP ukryta „někde uvnitř programu“ a uživatel s ní ani nepříjde do styku.

V rámci průmyslových aplikací vznikla v souvislosti s MKP řada předsudků a mýtů.

- **Nejnebezpečnějším mýtem je „slepá“ víra, že vypočtené výsledky jsou správné.**
- Výpočet MKP je věrohodnější než analytický výpočet
- Výpočet MKP je rychlejší než analytický výpočet
- Zavedení MKP ve firmě zlevní vývoj a konstrukci
- Zavedení MKP vede ke zvýšení kvality (bezpečnosti) konstrukcí

Tyto výroky nejsou vyslovenými nepravdami, ale neplatí univerzálně:

- Za správnost výsledků ručí výpočtář, nikoli metoda. Metodu lze použít nevhodným způsobem jak z hlediska vlastního modelování mechanické soustavy (např. rozhodování zda užít 1D, 2D či 3D kontinuum, skořepiny, nosníky, elastický nebo inelastický materiálový model), tak i z hlediska použitých výpočtových postupů – lineární či nelineární, statický či dynamický . . .
- Např. při aplikaci výsledků výpočtu v odhadu životnosti cyklicky zatěžovaného tělesa může být analytický výpočet, který odpovídá dané normě výpočtu poškození a způsobu, kterým byla získána materiálová data, přesnější i rychlejší.
- Vlastní výpočet mnohdy je rychlejší, ale tvorba modelu bývá velmi náročná.
- Často se MKP ve firmě zavádí tak, že se nakoupí program. Využívání programu ale vyžaduje kvalifikované pracovníky. S tím ovšem management nepočítal. Někdy se dokonce stane, že program vůbec není nainstalován. Běžněji je používán ve volných chvílích, kdy se pracovníkovi podaří se „utrhnout“ od důležitějších povinností. V takových případech je levnější nekupovat program, ale výpočty.
- Platí to, co v prvním bodě. Za kvalitu a bezpečnost konstrukce ručí konstruktér. Na základě nekvalitních výpočtů nevznikne kvalitní konstrukce.

Obecně platí, že v průmyslových aplikacích je MKP **prostředkem**, nikoli **cílem**. Z tohoto hlediska je třeba vždy zvažovat nejen to, zda MKP vůbec použít<sup>3</sup>, ale také to, jak ji použít.

## 2.2 Stručná rekapitulace pojmů MKP.

Pro intuitivní chápání pojmů uzal a element je rozhodující představa, že těleso je myšleně rozděleno na podoblasti jednoduchého geometrického tvaru – elementy. Interakce mezi elementy a okolím i mezi elementy navzájem se odehrává v izolovaných bodech – uzlech MKP sítě. V uzlech sousední elementy sdílí parametry interpolace posuvu a současně je v nich vyjadřována rovnováha silových účinků. Vysoká výkonnost tohoto způsobu diskretizace je zajištěna tak, že

<sup>3</sup>Odpověď na tuto otázku se může např. lišit podle dostupných softwarových prostředků, aktuálního výkonu hardware, který je k dispozici a mnoha dalších vlivů.

- uzly leží v topologicky významných bodech elementů – ve vrcholech, na středech hran, v těžištích, a podobně.
- geometrie elementů je určena polohou uzlů<sup>4</sup>.

Takto se informace popisující MKP síť přirozeně dělí na informaci o geometrii (tedy o polohách jednotlivých uzlů) a o topologii (tedy o tom, které uzly a jak definují každý konkrétní element).

Uzlové body – uzly jsou v klasické metodě konečných prvků primárním výrazem diskretizace. Nesou veškerou informaci o primárních<sup>5</sup> hledaných polích ve formě uzlových parametrů. Tyto parametry mají obvykle fyzikální význam. V klasické deformační variantě MKP v mechanice poddajných těles jsou typickými uzlovými parametry zobecněné uzlové posuvy, tedy přímo složky vektoru posuvu v uzlu, natočení v uzlu, případně hodnoty vyšších derivací pole posuvu<sup>6</sup>. Elementy využívají uzlové parametry ke konstrukci přibližných polí posuvu. Jsou – li tyto parametry přímo hodnotami těchto polí, lze si výsledné přibližné řešení představit jako jistou „interpolaci“ hledaného pole, která nabývá v uzlech právě hodnot příslušných parametrů. Stěžejní výhodou fyzikální ekvivalence mezi uzlovými parametry a hledanými poli je snadná formulace okrajových podmínek, která se takto redukuje na předepsání uzlových hodnot.

V uzlech je realizováno propojení elementů. Pole posuvů na řešených tělesech jsou interpolována po částech nad jednotlivými elementy. Interpolace je kvalitativně dána typem elementu a kvantifikována uzlovými parametry. Elementy soustřeďují účinky vnitřních a vnějších sil do uzlů<sup>7</sup>. Tyto tzv. ekvivalentní uzlové síly jsou funkcí posuvu (vnitřní síly) nebo rozložených vnějších zatížení objemových (např. gravitací), plošných (např. kontaktem s jiným tělesem nebo médiem), liniových (idealizace kontaktu s hranou tělesa). Sdílení uzlů sousedními elementy lze zjednodušeně, ale názorně chápat následovně:

- Primární neznámé pole (v deformační variantě mechaniky poddajných těles pole posuvu) je interpolováno spojitě, sousední elementy mají ve společných uzlech společné hodnoty.
- Rovnováha tělesa je přibližně podmíněna rovnovážnou silovou bilancí v uzlech. Podmínku rovnováhy tělesa formulujeme jako požadavek, aby v každém uzlu byla výslednice vnitřních a vnějších sil od všech elementů, které se v něm protínají, nulová.

Tento pohled nezohledňuje sice hluboké matematické aspekty variační formulace úlohy mechaniky poddajných těles, ale je velmi užitečný při intuitivním chápání MKP modelů v technické praxi. Funguje například také v úlohách vedení tepla, kde hledané skalární pole

---

<sup>4</sup>Přesněji, geometrie může záviset i na počátečních hodnotách uzlových parametrů. Například u skořepinových elementů je typickým parametrem směr normály ke střednici.

<sup>5</sup>Pojmem primární pole se rozumí pole, které je přímým řešením dané formulace fyzikálního problému. Například v mechanice kontinua je v deformační variantě primárním polem pole posuvů. Pole deformace a napjatosti jsou z něj rekonstruovatelná aplikací Cauchyho vztahů a konstitutivních rovnic. V silové variantě je primárním polem napjatosti. Pole deformace je možno určit aplikací konstitutivních rovnic a pole posuvů je integrálem Cauchyho vztahů.

<sup>6</sup>V úloze vedení tepla je uzlovým parametrem přímo teplota.

<sup>7</sup>Tato formulace není zcela přesná. Lze jí chápat v kontextu interpretace funkcionálu celkové potenciální energie na tělese diskretizovaném MKP, jak je uvedeno na str. 11, nebo intuitivně, jako silovou odezvu části tělesa na vynucenou deformaci.

teplot je interpolováno uzlovými teplotami. Tepelná rovnováha je podmíněna rovnovážnou bilancí vektorů uzlových tepelných toků.

Z variační formulace plyne podstatný závěr o vzájemně jednoznačném přiřazení zobecněných uzlových posuvů a sil. Ke každé složce zobecněného posuvu v uzlu nějakého elementu je přiřazena složka zobecněné síly, která na tomto posuvu koná práci. Typické dvojice zobecněná síla–zobecněný posuv jsou v tabulce

Zobecněný posuv		Zobecněná síla	
typ	jednotky	typ	jednotky
posuv	[m]	síla	[N]
natočení	[1]	silová dvojice	[Nm]
změna křivosti	[m <sup>-1</sup> ]	?	[Nm <sup>2</sup> ]

K libovolným zobecněným posuvům v uzlech nějakého elementu je jednoznačně přiřazena interpolace pole posuvu. Zobecněné uzlové síly jsou ekvivalentní intenzitám vnějších, resp. vnitřních sil v tom smyslu, že práce vnějších, resp. vnitřních sil (napjatosti) na přiřazeném poli posuvů je rovna práci zobecněných uzlových ekvivalentních vnějších, resp. vnitřních sil na zobecněných uzlových posuvech a to pro libovolné zobecněné uzlové posuvy. Dá se dokázat, že splňuje-li definice interpolačních funkcí na elementu jisté předpoklady, jsou ekvivalentní zobecněné uzlové síly jednoznačné.

## 2.3 Datové struktury MKP.

Uzel je v MKP velmi jednoduchá entita. Je nositelem informace o geometrii sítě, o parametrech interpolace pole posuvu a o ekvivalentních uzlových silách. V soudobých systémech MKP je obvykle definována omezená množina zobecněných uzlových posuvů taková, že zobecněné posuvy libovolného uzlu libovolného elementu v systému jsou její podmnožinou. Uzly je možno klasifikovat podle toho, jaké zobecněné posuvy obsahují. Dobře popsaná a seřazená množina uzlových parametrů společná pro celý program je jedním z pilířů organizace dat. Konečněprvkovou entitou, která využívá uzlové parametry, je element. Součástí definice elementu je seznam parametrů v jeho jednotlivých uzlech<sup>8</sup>. Je-li uzel sdílen více elementy, které mají tentýž parametr, je hodnota tohoto parametru společná. Pro soudobé programy MKP zaměřené na mechaniku poddajných těles je typická následující množina zobecněných uzlových posuvů:

- tři složky prostého vektoru  $\mathbf{u}$  posunutí uzlového bodu –  $u_x, u_y, u_z$
- tři složky prostého axiálního vektoru  $\boldsymbol{\theta}$  natočení uzlového bodu –  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$
- další složky zobecněných posuvů, zpravidla jde o vyšší derivace pole posuvů v uzlu
- amplituda  $w$  deplanační funkce asociované k profilu nosníkového elementu (pokud je teorie deplanace v nosníkových elementech implementována)
- teplota  $T$  případně teploty ve vrstvách skořepinových elementů

<sup>8</sup>Logickou snahou tvůrců elementů je, aby tato množina byla stejná pro všechny uzly daného elementu, potažmo rodiny topologických variací daného elementu. V soudobých programech MKP je tento požadavek běžně splněn, v literatuře jsou však popsány i elementy, které tento požadavek nespĺňují

element								
	lokální uzel	1	2	3	4	5	6	1
$u_x$	1	1	1	1	1	1	1	1
$u_y$	1	1	1	1	1	1	1	1
$u_z$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_x$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_y$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_z$	0	0	0	0	0	0	1	1
$T$	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabulka 2.1: Příklad definice lokálních kódů uzlů pro dva typy elementů.

Nutnou podmínkou sdílení hodnot fyzikálních vektorů, případně tenzorů je, aby jejich složky byly vyjadřovány ve společném souřadnicovém systému – tzv. **uzlovém souřadnicovém systému**, který je atributem uzlu.

K zajištění správného sdílení uzlů v MKP sítích se využívá následující přístup založený na jednoznačném seřazení zobecněných uzlových parametrů a pojmech **lokálních** a **globálních** čísel a kódů uzlů. Lokální uzly jsou svázány s množinou elementů daného typu, jak ukazuje tabulka 2.3. Trojúhelníkový element pro rovinnou úlohu má ve vrcholech tři uzly s lokálními čísly (1, 2 a 3) a tři lokální uzly<sup>9</sup> (4, 5 a 6) ve středech hran. Každý lokální uzel má dva parametry – zobecněné posuvy  $u_x$  a  $u_y$ . Rovinný nosníkový prvek s topologií úsečky a dvěma lokálními uzly (1 a 2) v koncových bodech disponuje v každém uzlu třemi zobecněnými posuvy – posunutími  $u_x$ ,  $u_y$  a natočením  $\theta_z$ . V tabulce 2.3 číslo 1, resp. 0 znamená, že daný lokální uzel má, resp. nemá příslušný parametr. Sloupec pod lokálním číslem uzlu představuje **lokální kód uzlu**. Lokální kódy uzlů trojúhelníkového elementu jsou 1100000, lokální kódy uzlů nosníku jsou 1100010.

Na obrázku 2.1 je část MKP sítě. Informace o MKP síti se obvykle zaznamenává v následujících datových strukturách:







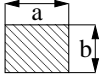
- **Tabulka uzlů**<sup>10</sup> 2.2, ve které jsou ke každému globálnímu uzlu přiřazeny jeho souřadnice, případně počáteční hodnoty parametrů (viz pozn. 4 na str. 10). Globální kódová čísla vyjadřují, kterými parametry (z množiny povolených uzlových parametrů systému) uzel disponuje. Každý z elementů, které globální uzel sdílejí vnáší do tohoto uzlu parametry definované lokálním kódovým číslem v příslušném lokálním uzlu. Např. v globálním uzlu 3 ze sítě v obr. 2.1 se stýkají elementy 1, 2 a 3. Elementy

<sup>9</sup>S ohledem na jednoduchost vyjadřování bude nadále používána formulace lokální, resp. globální uzel namísto formulace uzel s lokálním, resp. lokálním číslem.

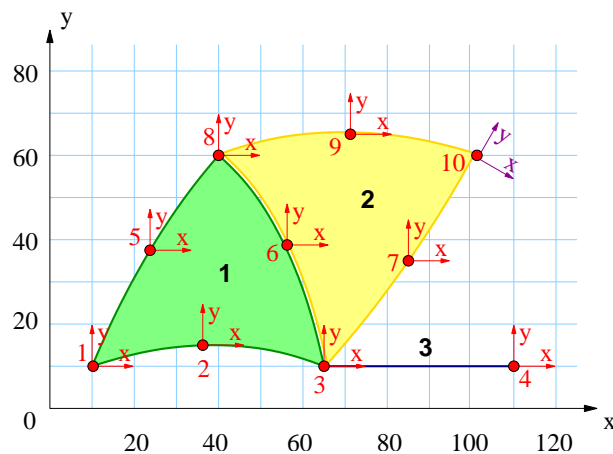
<sup>10</sup>Někdy též tabulka souřadnic

glob. č.	souřadnice		s. systém	glob. kódové číslo						
	$x$	$y$	[°]	$u_x$	$u_y$	$u_z$	$\theta_x$	$\theta_y$	$\theta_z$	$T$
1	10	10	0	1	1	0	0	0	0	0
2	35	15	0	1	1	0	0	0	0	0
3	65	10	0	1	1	0	0	0	1	0
4	110	10	0	1	1	0	0	0	1	0
5	24	38	0	1	1	0	0	0	0	0
6	46	40	0	1	1	0	0	0	0	0
7	85	35	0	1	1	0	0	0	0	0
8	40	60	0	1	1	0	0	0	0	0
9	72	66	0	1	1	0	0	0	0	0
10	102	60	-30	1	1	0	0	0	0	0

Tabulka 2.2: Tabulka uzlů k příkladu MKP sítě z obr. 2.1

el.	typ	materiál	parametry		tabulka incidencí						
			tl. $t$ [mm]	průřez	lokální uzel						
					1	2	3	4	5	6	...
1			2	—	8	3	1	6	2	5	—
2			2	—	10	3	8	7	6	9	—
3			—		3	4	—	—	—	—	—

Tabulka 2.3: Tabulka elementů k příkladu MKP sítě z obr. 2.1



Obrázek 2.1: Část MKP síť

1 a 2 jsou trojúhelníkové rovinné elementy. Oba sdílí globální uzel 3 v lokálním uzlu 2 s lokálním kódovým číslem 1100000. Element 3 je rovinným nosníkem, jehož lokální uzel 1 s kódovým číslem 1100010 koinciduje s globálním uzlem 3. Podle kódových čísel je zřejmé, že globální uzel 3 disponuje posuvy  $u_x$ ,  $u_y$  (společné pro všechny tři elementy) a  $\theta_z$  (pouze od elementu 3). Všechny tyto parametry jsou vyjádřeny v **uzlovém souřadnicovém systému**. Uvedený příklad vysvětluje obecné pravidlo: Globální kódové číslo uzlu je **logickým součtem**<sup>11</sup> lokálních kódových čísel všech lokálních uzlů, které s ním koincidují.

- **Tabulka elementů** 2.3, která přiřazuje ke každému elementu jeho **typ**, **tabulku incidence lokálních a globálních čísel**<sup>12</sup>, **odkaz na materiál** a další **parametry**.

Uvedené tabulky tvoří základ záznamu o MKP modelu. V MKP programech bývají obvykle komplikovaněji strukturovány. Například materiály a parametry bývají popisovány pomocí speciálních struktur a v tabulce elementů odkazovány pomocí návěstí (čísla nebo jména). Navíc jsou přidány informace o kinematických a silových okrajových podmínkách a o typu řešené úlohy.

**Poznámka 2.1:** Osvědčeným postupem je dvojjurovňové kódování dat MKP modelu. Model je předáván programu ve formě textového **vstupního souboru**, který je zapsán podle dohodnutých pravidel – syntaxe. Ačkoli se vstupní soubory jednotlivých programů liší klíčovými slovy, řazením a pod., vycházejí vesměs z logiky tabulek 2.2 a 2.3 a jsou snadno čitelné a přímo opravitelné. Vlastní řešení probíhá na binárních datových strukturách – **vnitřní reprezentaci MKP dat**, které jsou vytvářeny pouze v operační paměti nebo častěji v (pracovních) souborech. Vnitřní reprezentace dat je nutná vzhledem k výkonu programu. Jednotlivé položky datových struktur jsou požadovány v mnoha fázích řešení a není možné je pracně vyhledávat v textových souborech a převádět z textových řetězců na reprezentace čísel. Vstupní soubor je praktický, neboť

- Zajišťuje snadnou návaznost a propojitelnost mezi speciálními programy podporujícími tvorbu MKP modelů – **preprocesory**

<sup>11</sup>Logickým součtem se míní přesně součet binárních čísel.  $1100000 + 1100000 + 1100010 = 1100010$ .

<sup>12</sup>Někdy též nazývanou kódovým číslem elementu [?].

- Umožňuje překonat běžné vývojové disproporce mezi preprocesorem a výpočtovým programem tak, že například dovolí výpočtáři po automatickém vygenerování MKP modelu zapsat přímo (v textovém editoru) data pro materiálový model, který je ve výpočtovém programu nově implementován, ale preprocesor ho dosud nepodporuje
- 

## 2.4 Klasifikace úloh (procedur) MKP.

Výběr typu úlohy je svázán s cílem modelování. Většinou jde o prvotní atribut modelu. Podle typu úlohy se volí další atributy jako dimenzionalita, typy elementů. Prvním hlediskem je druh fyzikálního problému, který má být MKP řešen. MKP je z hlediska matematiky v podstatě speciální technikou diskretizace při řešení parciálních diferenciálních rovnic variačními metodami. Přestože největší rozmach zatím zaznamenala jako robustní a výkonná metoda pro numerické řešení úloh mechaniky poddajných těles, bývá s úspěchem aplikována i v jiných oblastech. V tomto odstavci je bez nároku na úplnost předložena výčet oblastí, ve kterých lze, kromě mechaniky, využít „komerční“ MKP systémy:

- **Úloha vedení tepla.** Obvykle je formulována pro řešení ustálených i přechodových dějů. Řada systémů implementuje také teplotně mechanické analýzy a to jak zjednodušené, tak i plně svázané. Ve zjednodušených (nesvázaných) formulacích je samostatně řešeno teplotní pole a to je přeneseno do mechanické analýzy jako teplotní zatížení. Teplotní analýza nemá informace o případných zdrojích tepla mechanickou disipací a jejich zpětném ovlivnění teplotními napětími. U svázaných úloh jsou tyto vazby zohledněny. Svázané úlohy vyžadují speciálně formulované elementy, které mají za parametry současně zobecněné uzlové posuvy i uzlové teploty. Typickou svázanou úlohou je simulace procesu brzdění mechanickou brzdou.
- **Akustika,** zejména vnitřní, která řeší šíření akustického tlaku stlačitelným médiem.
- **Úloha vedení elektrického náboje** řeší ustálený i neustálený pohyb elektrického náboje ve trojrozměrných vodivých tělesech. Jsou formulovány i svázané úlohy řešící vznik a vedení tepla od průchodu elektrického proudu při výrazné závislosti elektrické vodivosti na teplotě.
- **Řešení elektromagnetického pole.**
- **Řešení difuze.**
- **A další...**

Východiskem pro výběr typu procedury v mechanice těles a soustav jsou pohybové rovnice kontinua v Lagrangeovském vyjádření

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)}{\partial x_j} = f_i^B(\mathbf{x}, t) - \rho(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

při okrajových podmínkách

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) n_j &= f_i^S(\mathbf{x}, t) & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_\sigma \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_u \end{aligned}$$

a počátečních podmínkách, které předepisují v každém bodě  $\mathbf{x} \in \Omega$  dvě veličiny z posuvu  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)$ , rychlosti  $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0)$  a zrychlení  $\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0)$  na počátku děje – v čase  $t = 0$ . Symbol  $\mathbf{x}$  je polohový vektor,  $\boldsymbol{\sigma}$  je Cauchyho tenzor napjatosti,  $\rho$  je hustota,  $\Omega$  je oblast, kterou zaujímá těleso a ve které působí vnější objemové  $\mathbf{f}^B(\mathbf{x}, t)$  a setrvačné síly,  $\partial\Omega_\sigma$  je část hranice, na které působí plošné vnější síly  $\mathbf{f}^S(\mathbf{x}, t)$  a na zbytku hranice  $\partial\Omega_u = \partial\Omega - \partial\Omega_\sigma$  jsou předepsány posuvy  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)$ .

Uvedené rovnice jsou prostorově diskretizovány metodou konečných prvků ve tvaru soustavy obyčejných diferenciálních rovnic

$$\underline{M}(\vec{X}, t) \ddot{\vec{U}}(t) + \underline{C}(\vec{X}, t) \dot{\vec{U}}(t) + \underline{K}(\vec{X}, t) \vec{U} = \vec{F}(t) \quad (2.1)$$

s okrajovými podmínkami kinematickými

$$U_i = U_{0i}(t) \quad \forall i \in \mathcal{N}_U$$

a silovými

$$F_i = F_{0i}(t) \quad \forall i \in \mathcal{N}_F,$$

kde  $\mathcal{N}_U$  je množina indexů zobecněných posuvů, které jsou předepsány prostřednictvím kinematické okrajové podmínky a  $\mathcal{N}_F$  je množina indexů, ve kterých jsou předepsány silové okrajové podmínky. Počáteční podmínky musejí být definovány pro každý index  $i$  z  $\mathcal{N}_F$  v podobě dvou zadaných veličin z posuvu  $U_i$ , rychlosti  $\dot{U}_i$  a zrychlení  $\ddot{U}_i$ .

Maticové operátory  $\underline{M}$ ,  $\underline{C}$ ,  $\underline{K}$  jsou **matice hmotnosti**, **matice tlumení** a **matice tuhosti** systému. Matice hmotnosti vyjadřuje setrvačné síly, matice tlumení síly od viskózního tlumení v materiálu i z okolí a matice tuhosti odpor materiálu vůči deformaci.

### 2.4.1 Třídění z hlediska vztahu k času

- **Stacionární a nestacionární analýzy.** Řada (nejen mechanických) systémů se v jistých případech chová tak, že při změně okolních podmínek proběhne přechodový proces, během kterého se stavové parametry systému mění v čase. Po konečné době je dosažen stav, kdy je časová změna stavových parametrů nulová – **stacionární stav** se stavovými parametry změněnými oproti počátečnímu stavu. Cílem stacionárních analýz je nalézt právě tento výsledný stav, aniž by byl řešen přechodový proces. Cílem nestacionárních analýz je získat stavové parametry jako funkce času. O aplikaci stacionárních či nestacionárních výpočtových procedur musí rozhodnout výpočtář s ohledem na cíle výpočtu.
- **Statické a dynamické analýzy.** Tyto pojmy byly zavedeny v mechanice a rozlišují případy, kdy jsou a nejsou uvažovány setrvačné síly. Někdy bývají pojmy stacionární a statická analýza zaměňovány. Ve většině případů platí, že statická analýza je stacionární a dynamická nestacionární, ale ne vždy.

Například: soustava s jednou hmotou a jednou pružinou v gravitačním poli může být s ohledem na kontext řešena jako:

- **statická stacionární úloha:** Na hmotu působí gravitační pole a předpětí v pružině, hledá se stav, kdy pružina je deformována tak, že oba účinky jsou v rovnováze. Obecně rovnice (2.1) přechází na

$$\underline{K} \vec{U} = \vec{F}$$



- **dynamická stacionární úloha:** Při zanedbání tlumení lineární systém volně kmitá s neproměnnou amplitudou, frekvencí a fázovým posuvem. Tyto veličiny jsou cílem řešení. Obecně rovnice (2.1) přechází na

$$\underline{M}\ddot{\vec{U}}(t) + \underline{K}\vec{U} = \vec{0}$$

Pohyb systému buzeného harmonicky (složky sil mají v čase sinusový průběh se stejnou frekvencí) je po doznění přechodového děje popsán sinusovým průběhem výchylek v uzlech, se stejnou frekvencí a různými fázovými posuvy a amplitudami. **Harmonická analýza** hledá pro každý uzel harmonicky buzeného systému amplitudu a fázový posuv jeho výchylky stacionárního kmitání.

- **dynamická nestacionární úloha:** S uvažováním tlumení amplituda s časem exponenciálně klesá k nule. Cílem je popsat kompletní stav systému jako funkci času. Obecně je řešena rovnice (2.1).
- **statická nestacionární úloha:** Deformace materiálu pružiny pod stálým zatížením v čase roste (např. díky creepu za zvýšené teploty). Rychlost růstu i její změny v čase jsou malé. Setrvačné účinky jsou zanedbány a výchylka se časem mění. Takové úlohy v mechanice se také označují jako **kvazistatické**. Obecně rovnice (2.1) přechází na

$$\underline{C}(\vec{X}, t)\dot{\vec{U}}(t) + \underline{K}(\vec{X}, t)\vec{U} = \vec{F}(t)$$

### Klasifikace nestacionárních dynamických analýz podle způsobu integrace pohybových rovnic.

Základním je dělení na

- analýzy s přímou integrací pohybových rovnic
- analýzy využívající modální transformaci

Soustava (2.1) je z matematického hlediska soustavou (obecně nelineárních<sup>13</sup>) obyčejných diferenciálních rovnic s nekonstantními koeficienty  $\underline{M}$ ,  $\underline{C}$ ,  $\underline{K}$ . Aplikace diferenční metody vede k tzv. **Přímému řešení pohybových rovnic**. Přibližné řešení se hledá ve tvaru posloupnosti vektoru posuvů

$$\{\vec{U}_k\}_{k=0}^N$$

na posloupnosti okamžiků

$$\{t_k\}_{k=0}^N$$

tak, že

$$\vec{U}_k = \vec{U}(t_k)$$

je přibližné řešení v okamžiku  $t_k$ . Nahrazením derivací vektoru posuvů diferencemi přejde rovnice (2.1) na soustavu (obecně nelineárních) obyčejných algebraických rovnic s nekonstantními koeficienty  $\underline{M}$ ,  $\underline{C}$ ,  $\underline{K}$ . Podle užitého diferenčního schématu se přímá integrace pohybových rovnic dělí na **implicitní** a **explicitní**.

<sup>13</sup>Koeficienty  $\underline{M}$ ,  $\underline{C}$ ,  $\underline{K}$  závisejí prostřednictvím aktuálních poloh  $\vec{X}(t)$  na řešení  $\vec{U}(t)$ .

- **Implicitní integrace pohybových rovnic** využívá diferenční schémata, která vyjadřují posuvy, rychlosti a zrychlení uzlů v čase  $t_{k+1}$  pomocí hodnot v čase  $t_k$  i v čase  $t_{k+1}$ . Z implicitních schémat se dnes prakticky používá schéma navržené Hilberem, Hughesem a Taylorem [[?]]. Schéma je nepodmíněně stabilní<sup>14</sup>, to znamená, že stabilita řešení nezávisí na délce kroku  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ . V každém kroku je nutno provést několikanásobně rozklad soustavy lineárních rovnic o dimenzi MKP modelu. Implicitní integrace je vhodná pro řešení pomalých a středně rychlých<sup>15</sup> nelineárních dynamických nestacionárních problémů
- **Explicitní integrace pohybových rovnic** využívá centrální diferenční schéma, které vyjadřuje posuvy, rychlosti a zrychlení uzlů v čase  $t_{k+1}$  pouze pomocí hodnot v čase  $t_k$ . Ve spojení s **nekonzistentní maticí hmotnosti**, ve které jsou veškeré hmoty soustředěny na diagonále, vede toto schéma na řešení soustavy rovnic, která je **diagonální** a vyžaduje tudíž pouze zlomek operací oproti implicitnímu schématu. Schéma je ale **podmíněně stabilní**. Stabilita je dosažena pouze tehdy, je-li splněno

$$\Delta t \leq \frac{1}{\pi f_{max}} \left( \sqrt{1 + \xi^2} - \xi \right),$$

kde  $f_{max}$  je maximální vlastní frekvence diskretizovaného systému a  $\xi$  je poměrný útlum v módu s nejvyšší frekvencí. Je zřejmé, že nejvyšší vlastní frekvence systému je shora ohraničena nejvyšší vlastní frekvencí jednotlivého elementu a ta, při daném materiálu, se zvyšuje s klesající velikostí elementu. Jinými slovy, čím jemnější prostorová diskretizace, tím menší je největší přírůstek času, který ještě zaručuje stabilitu řešení. Explicitní řešení vyžaduje extrémně velký počet kroků při extrémně nízké výpočtové náročnosti kroku. Explicitní schéma je vhodné pro řešení

- dynamických úloh s vysokou rychlostí dějů a s krátkými intervaly řešení. Typické jsou rázy, *crashe*, průstřely, . . .
- kvazistatických úloh s extrémním přetvořením těles. Zde se využívá tzv. *mass-scaling*–technika založená na umělém zvětšení hustoty. To vede k poklesu vlastní frekvence a tím ke zvýšení stabilního přírůstku času. Řešení pak probíhá s nerealistickými setrvačnými silami, ale výhoda „levného“ inkrementu je zachována. Přetvoření je dosaženo v obrovském množství inkrementů, což snižuje nároky na integraci konstitutivních rovnic, na kontaktní algoritmus a další výpočtové procedury. Proto je explicitní schéma vhodné pro řešení některých technologických procesů, jako např. hlubokého tažení, protahování, válcování za studena . . .
- extrémně velkých statických úloh. Podstatou je dynamické řešení mechanického systému s neproměnným zatížením až do dosažení ustáleného stavu. Počet operací na rozklad soustavy rovnic ve staticce je řádu  $N^3$ , kde  $N$  je počet stupňů volnosti. Počet operací na inkrement v explicitní metodě je řádu  $N$ , ale musí se  $p \times$  zopakovat. Existuje tedy nějaký limitní rozsah úlohy  $N_0$ , od kterého je efektivnější použít ustalovací explicitní metodu.

<sup>14</sup>Stabilitou se míní schopnost udržet malé odchylky dvou řešení systému, jejichž počáteční podmínky se liší pouze o malou hodnotu.

<sup>15</sup>Rychlost dějů, jak je uvedeno např. v [?] se v tomto kontextu posuzuje podle toho, zda významné změny geometrie systému, které nás zajímají, nastanou v době srovnatelné s dobou potřebnou k rozšíření napěťové vlny tělesem (rychlé děje) nebo v době řádově delší (děje pomalé).

Dovolí-li charakter modelu soustavu (2.1) linearizovat

$$\underline{M}\ddot{\vec{U}}(t) + \underline{C}\dot{\vec{U}}(t) + \underline{K}\vec{U} = \vec{F}(t), \quad (2.2)$$

lze ji takzvanou **modální transformací** převést na soustavu navzájem nepochybných rovnic<sup>16</sup> o stejné dimenzi, které mohou být řešeny separátně. Vektor posuvů  $\vec{U}(t)$  přejde modální transformací na vektor modálních proměnných  $\vec{q}(t)$ . Modální transformace je určena vlastními frekvencemi a vlastními vektory diskrétního systému. Jejich získání je poměrně „drahé“, ale samotné řešení modálních pohybových rovnic systému je efektivní. Navíc, má-li budící síla na pravé straně (2.2) ve vyšetřovaném intervalu speciální charakter, je možno transformaci provést pouze částečně s omezenou dimenzí modálního vektoru. **Modální transformace je při řešení nestacionární dynamiky lineárních mechanických systémů téměř vždy efektivnější než přímá integrace.**

## 2.4.2 Třídění z hlediska linearity rovnic.

„Příroda je nelineární<sup>17</sup>“. Současné MKP programy mají spolehlivé a robustní řešiče nelineárních úloh. Zvyšování výkonu a pokles cen výpočetní techniky se zatím nezastavují. Takové uvažování vede ke zdánlivě logickému závěru: V blízké budoucnosti (prakticky již dnes) nebude nutné řešit otázku, zda je nutno použít pro řešení konkrétní úlohy nelineární aparát nebo zda postačí lineární. Použije se prostě aparát nelineární, který vyřeší dobře i lineární úlohy. Existuje řada kvantitativních i kvalitativních důvodů pro odmítnutí podobných „optimistických“ úvah. Například:

- Přestože zdroje výkonu výpočetní techniky rostou, byly, jsou a budou omezené.
- Značná část přírůstku výkonu je v oblasti výpočtů ve strojírenství spotřebována požadavky na rozsah úloh. To je logické a oprávněné, protože v modelech samostatných součástí nebo dokonce jen jejich částí je zbytek konstrukce zpravidla zjednodušeně nahrazen okrajovými podmínkami, což je zdrojem chyb. Obecně platí, že čím větší okolí místa (součásti, skupiny), které je předmětem zájmu výpočtu, je součástí modelu, tím menší je vliv „nepřesných“ okrajových podmínek<sup>18</sup>.
- Dynamické analýzy založené na modálních transformacích musí být lineární z podstaty matematického aparátu. Použití modální transformace ve srovnání s aplikací přímého řešení pohybových rovnic přináší nejen urychlení, ale také novou kvalitu poznání při hodnocení dynamických vlastností systému.
- Některé aplikace, např. hodnocení životnosti na únavu, vyžadují zpracování vysokého počtu (řádově desítek až stovek tisíc) stavů modelu, které lze získat v dostatečné kvalitě lineárním kombinováním několika „jednotkových“ stavů.
- Nelineární analýzy kladou většinou vysoké nároky na odbornou kvalifikaci výpočtáře. Zejména při simulacích mezních stavů, hroucení, technologických procesů a pod. jsou nezbytné znalosti a zkušenosti výpočtáře a často i průběžná konfrontace s

<sup>16</sup>Tedy soustavu s diagonálními maticemi

<sup>17</sup>... v originále „nature is non-linear“. Toto heslo bylo před několika lety součástí reklamní kampaně jednoho MKP programu.

<sup>18</sup>Vše podstatně závisí na konkrétní konfiguraci a mohou existovat i výjimky

experimenty. Naproti tomu jednoduché lineární analýzy se často aplikují ve fázi návrhu a slouží ke získání orientačních údajů nebo k porovnání variant. Jsou robustní, vysoce spolehlivé (při respektování omezení plynoucích z linearizace) a mohou je provádět i lidé (v oboru analýzy mechanických systémů) méně kvalifikovaní.

Pro pochopení možností a omezení lineárních i nelineárních analýz je užitečné uvědomit si jednotlivé příčiny nelinearity mechanických soustav.

### Lineární analýzy.

- Rovnováha se vyjadřuje v **nedeformovaném** (referenčním) stavu.
- Vztah mezi lokální mírou deformace  $\varepsilon$  a posuvem je lineární<sup>19</sup>.
- Materiál má lineární odezvu – je lineárně elastický.
- Vazby jsou reprezentovány pouze lineárními rovnicemi.

Pro lineární úlohy je typická vysoká míra idealizace, ale i vysoká spolehlivost MKP diskretizace. Důležitými atributy lineárních modelů v mechanice je zaručená existence a jednoznačnost řešení. Lineární modely jsou konzervativní v tom smyslu, že nedochází k žádné disipaci energie, a že konečný stav statického modelu závisí na konečných hodnotách vynucených posuvů a zatížení a nikoli na způsobu, kterým jej bylo dosaženo. Řešení lineárního modelu lze získat superpozicí několika dílčích řešení jako lineární kombinaci dílčích řešení pro dílčí zatížení.

**Poznámka 2.2:** Řešení rovnic rovnováhy (pro jednoduchost ve staticce) v nedeformovaném stavu lze nalézt např. variačně, pomocí principu virtuálních posuvů

$$\int_{\Omega_0} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}^* dV - \int_{\Omega_0} \delta u_i f_i^B dV - \int_{\partial \Omega_{\sigma 0}} \delta u_i f_i^S dS = 0, \quad (\text{a})$$

kde  $\Omega_0$  je oblast, kterou zaujímá těleso v referenčním stavu a ve které působí objemové síly  $f_i^B$ ,  $\partial \Omega_{\sigma 0}$  je část hranice, na které působí plošné vnější síly<sup>20</sup>  $f_i^S$ ,  $\sigma^*$  je rovnovážný Cauchyho tenzor napjatosti,  $\delta \mathbf{u}$  je virtuální posuv, s nímž je vztahy

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right] \quad (\text{b})$$

svázána virtuální deformace  $\delta \varepsilon$ . MKP diskretizace tělesa  $\Omega$  spočívá v jeho rozdělení na podoblasti (konečné elementy), na nichž je funkce posuvů interpolována v závislosti na konečném počtu parametrů–**zobecněných uzlových posuvů**  $\vec{U}$  a integraci s využitím věty o aditivitě určitého integrálu. S ohledem na lineární konstitutivní vztah–rozšířený Hookeův zákon

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (\text{c})$$

<sup>19</sup>Viz Cauchyho vztahy

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right].$$

<sup>20</sup>Na zbytku hranice  $\partial \Omega_{u 0} = \partial \Omega_0 - \partial \Omega_{\sigma 0}$  jsou předsány posuvy.

dostaneme z (a) po diskretizaci a integraci známý vztah

$$\underline{K} \vec{U} = \vec{F}, \tag{d}$$

kde **matice tuhosti**, kterou lze definovat vztahem

$$\delta \vec{U}^T \underline{K} \vec{U}^* = \int_{\Omega_0} C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^* \delta \varepsilon_{ij} \, dV,$$

je **symetrická** a nezávisí na  $\vec{U}$  ani na vektoru **zobecněných uzlových sil**, který lze definovat vztahem

$$\delta \vec{U}^T \vec{F} = \int_{\Omega_0} \delta u_i f_i^B \, dV_0 - \int_{\Gamma_{\sigma_0}} \delta u_i f_i^S \, dS_0 = 0.$$

•

### Nelineární analýzy.

Zdroje nelinearit jsou:

1. **Stav, ve kterém systém dosahuje rovnováhu:** Mechanická soustava musí rovnováhu dosáhnout v konečném (zdeformovaném) stavu, který předem neznáme.
2. **Míry deformace:** Tenzor malých deformací  $\varepsilon$  je linearizovanou mírou deformace. Vztah mezi „korektními“ mírami deformace a polem posuvu je nelineární<sup>21</sup>.
3. **Materiál:** Závislost napjatost–deformace (konstitutivní vztah) je nelineární<sup>22</sup>. V širším smyslu lze hovořit také o nelineárních konstitutivních vztazích u elementů se soustředěnými parametry (pružin, tlumičů ...).
4. **Kinematické okrajové podmínky a vazby:** Typická je vazba uzlu ke křivce nebo křivé ploše, kontakt těles, hysterezní (třecí) vazby...

Nelineární úlohy se na rozdíl od lineárních vyznačují závislostí na **cestě**–posloupnosti stavů, kterými systém prošel od počátku do konce děje. Pro řešení nestačí znát okrajové podmínky na počátku a na konci, ale je třeba je popsat i v průběhu děje. U nestacionárních úloh je cesta přirozeně parametrizována časem. Ve stacionárních formulacích není fyzikální čas parametrem úlohy, ale v MKP se používá k parametrizaci cesty. Při tom fakt, jestli rozdíl mezi počátečním a koncovým časem je 0,01 nebo 1000 nehraje ve stacionárních úlohách roli.

Obecnou strategií řešení nelineárních rovnic je v případě stacionárních dějů **přírůstková metoda**, v případě dějů nestacionárních **přímá integrace pohybových rovnic** v

<sup>21</sup>Např. známý Green–Lagrangeův tenzor deformace lze zapsat

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right].$$

<sup>22</sup>Např. tenzor  $\underline{C}$  v (c) může být funkcí deformace. Obecnější nelineární konstitutivní vztah může mít tvar jako v (2.5) na str. 24

čase diferenční metodou. Podstata obou přístupů spočívá v kombinaci lineárního odhadu přírůstku řešení a jeho následného iterativního zpřesnění.

Při přírůstkovém řešení i přímé integraci pohybových rovnic u nelineárních úloh MKP je řešení vyjadřováno v posloupnosti „časových“ okamžiků  $\{t_k\}_{k=0}^N$ . Označme  $\mathcal{N}_U$  množinu těch indexů zobecněných uzlových posuvů, které jsou předepsány jako funkce času<sup>23</sup>

$$U_i = U_i(t) \quad \forall i \in \mathcal{N}_U,$$

a  $\mathcal{N}_F$  množinu indexů zobecněných uzlových posuvů, pro které jsou předepsány zobecněné uzlové síly jako funkce času

$$F_i = F_i(t) \quad \forall i \in \mathcal{N}_F.$$

Je zřejmé, že pro jeden parametr nelze současně předepsat přímo jeho hodnotu i odpovídající vnější sílu

$$\mathcal{N}_F \cap \mathcal{N}_U = \emptyset.$$

Předepsáním vynuceného posuvu předpokládáme, že okolí je schopno generovat libovolně velkou reakci, která udržení hodnoty tohoto posuvu zajistí. Protože indexy volných (nepředepsaných) parametrů spadájí také do  $\mathcal{N}_F$ , je zřejmé, že

$$\mathcal{N}_F \cup \mathcal{N}_U = \mathcal{N},$$

kde  $\mathcal{N}$  je množina všech indexů parametrů.

Řekneme-li, že **jako přibližné (diskretizované) řešení nelineární úlohy v MKP hledáme posloupnost vektorů zobecněných uzlových posuvů**

$$\{\vec{U}_k\}_{k=0}^N, \text{ kde } \vec{U}_k = \vec{U}(t_k),$$

máme přesně řečeno na mysli posloupnost subvektorů zobecněných uzlových posuvů, protože pro indexy z množiny  $\mathcal{N}_U$  byly hodnoty známy předem.

Vlastní řešení je kontinuační, pro nalezení řešení v okamžiku  $t_k$  je nutno znát řešení v okamžiku  $t_{k-1}$ . Klasickým přístupem v nelineární statice je Newton–Raphsonova metoda, ve které je pro obecný okamžik  $t_k$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{F} &= \vec{F}_k - \vec{F}_{k-1} \\ \Delta \vec{U} &= \vec{U}_k - \vec{U}_{k-1}, \end{aligned}$$

při čemž přírůstek posuvu  $\Delta \vec{U}$  je nejprve odhadnut pomocí linearizované rovnice

$$\underline{K}_t(\vec{x}, \boldsymbol{\sigma}) \Delta \vec{U}^0 = \Delta \vec{F}. \quad (2.3)$$

Levá, resp. pravá strana rovnice (2.3) představuje odhad záporně vzatého přírůstku vnitřních  $-\vec{F}^I$ , resp. přírůstek vnějších  $\vec{F}$  sil systému diskretizovaných v uzlech. Samotná rovnice podmiňuje rovnováhu vnitřních a vnějších uzlových sil tak, že pokud na počátku v okamžiku  $t_{k-1}$  platilo

$$\vec{F}_{k-1}^I + \vec{F}_{k-1} = \vec{0}$$

<sup>23</sup>vektor zobecněných uzlových posuvů  $\vec{U}$  je algebraický vektor, ve kterém jsou uspořádány složky zobecněných posuvů jednotlivých uzlů. Index  $i$  u složky  $U_i$  nemá vztah k ose souřadného systému, ale pouze k pořadí složky.

a

$$\Delta \vec{F}^I + \Delta \vec{F} = \vec{0},$$

musí též být na konci v okamžiku  $t_{k-1}$  splněna podmínka rovnováhy diskretizovaného systému

$$\vec{F}_k^I + \vec{F}_k = \vec{0}.$$

Linearizovaný operátor  $\underline{K}_t$  se obvykle označuje jako **tečná** (okamžitá) **matice tuhosti**. Závisí na okamžité geometrii MKP modelu dané polohami uzlů  $\vec{x}$ , na aktuálním stavu napjatosti  $\vec{\sigma}$  v okamžiku  $t_{k-1}$  a na historii zatěžování.

Pro odhadnuté posuvy lze provést přesnou<sup>24</sup> integraci vnitřních sil  $\vec{F}^I$ . Protože rovnice (2.3) je linearizovaná, platí, že nevyvážené síly  $\vec{F}^N$ , které jsou rozdílem vnějších a vnitřních sil v odhadnuté konečné konfiguraci a v případě rovnováhy by měly být nulové, nulové nejsou

$$\vec{F}^N = \vec{F} - \vec{F}^I \neq \vec{0}.$$

Odhad rovnovážného přírůstku posuvů  $\Delta \vec{U}^0$  musí být opraven o  $\Delta \vec{U}$  tak, aby vyvažoval nevyváženou sílu  $\vec{F}^N$

$$\underline{K}_t(\vec{x}^0, \vec{\sigma}^0) \Delta \vec{U} = \vec{F}^N. \quad (2.4)$$

Vektor  $\vec{x}^0$  reprezentuje geometrický stav diskretizovaného systému v okamžiku  $t_k$ , po lineárním odhadu.

$$\vec{x}^0 = \vec{x}_{k-1} + \Delta \vec{U}^0.$$

Také stav napjatosti  $\vec{\sigma}^0$  je pro daný konstitutivní model materiálu integrován po elementech z okamžiku  $t_{k-1}$  do okamžiku  $t_k$  v závislosti na přírůstku posuvů. Odhad přírůstku posuvu po první iteraci je

$$\Delta \vec{U}^1 = \Delta \vec{U}^0 + \Delta \vec{U}.$$

Opravování přírůstku posuvů se provádí dokud nejsou splněny podmínky dosažení konvergence, např.

$$\left\| \vec{F}^N \right\| \leq \epsilon_N$$

nebo

$$\left\| \Delta \vec{U} \right\| \leq \epsilon_U.$$

## 2.5 Klasifikace elementů.

V této kapitole budou rozebrána základní hlediska třídění konečných elementů. Při rozsahu knihoven elementů soudobých MKP programů<sup>25</sup> je formální klasifikace nutným předpokladem k efektivní orientaci uživatele. Volba hledisek třídění má význam i pro správné rozhodování v procesu tvorby modelu. V kapitole jsou rozebrána následující hlediska a třídění:

- Třídění na elementy diskretizující kontinuum a elementy se soustředěnými parametry (strukturální).

<sup>24</sup>Ve smyslu numerické integrace podle „času“

<sup>25</sup>Např. v knihovně ANSYSu je zhruba 150 typů elementů

- Třídění podle dimensionalit úlohy.
- Třídění podle dimensionalit elementů.
- Třídění podle namáhání elementů.

### 2.5.1 Elementy diskretizující kontinuum a elementy se soustředěnými parametry.

1. **Elementy diskretizující kontinuum.** Jejich fyzikální vlastnosti (hmotnost, tuhost, ...) jsou popisovány s využitím klasické mechaniky kontinua, která za předpokladu platnosti principu okolí umožňuje při popisu těles oddělit vlastnosti geometrické a materiálové<sup>26</sup>. Vlastnosti materiálu se popisují vztahy mezi intenzivními<sup>27</sup> veličinami – tzv. klasickými **konstitutivními vztahy** – materiálovými rovnicemi mezi tenzorem napjatosti  $\sigma$  a tenzorem deformace  $\varepsilon$  v obecném tvaru

$$\sigma(t) = \sigma(\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t), \varepsilon(\tau)|_{\tau=0}, \dots). \quad (2.5)$$

Napjatost  $\sigma(t)$  v čase  $t$  je funkcí deformace  $\varepsilon(t)$  a rychlosti deformace  $\dot{\varepsilon}(t)$  v okamžiku  $t$  a případně historie zatěžování od počátku děje ( $\tau = 0$ ) do aktuálního okamžiku<sup>28</sup> ( $\tau = t$ ). Parametry konkrétního materiálu se určují experimentálně (například klasickou tahovou zkouškou), ale jsou použitelné univerzálně, bez ohledu na typ elementu a geometrii modelovaných těles. Elementy diskretizující kontinuum reprezentují oblast v tělese bez ohledu na to, zda v jedno, dvoj nebo trojrozměrném, zda jde o Cauchyovské klasické kontinuum, či o kontinuum ohybové (skořepiny, nosníky). Mají obsahy (tedy objem ve 3D kontinuu, plochu ve 2D kontinuu a délku v 1D kontinuu) definované svou geometrií.

2. **Elementy se soustředěnými parametry.** Typické pro ně je, že jejich fyzikální vlastnosti nezávisí na geometrii a materiálu, ale jsou přiřazovány přímo. Umožňují tak například obejít podrobné a velmi drahé modelování těch částí systému, pro které jsou k dispozici naměřená nebo jinak získaná data. Obvykle reprezentují nějakou geometricky nemodelovanou část konstrukce. Buďto rozměry nemají (například soustředěná hmota je element popsáný jediným uzlem) nebo jejich rozměry představují jen relativní polohu potřebnou pro výpočet vztahu mezi posuvy a silami. (Například element nehmotná pružina má dva uzly. Změna jejich vzdálenosti je přímo úměrná působící síle.). Element soustředěná hmota má jako parametr přímo

<sup>26</sup>Tento stěžejní praktický výsledek mechaniky kontinua, který jsme zvyklí považovat za samozřejmost, redukuje množství nutných experimentů při matematickém modelování systémů poddajných těles. Bez mechaniky kontinua by deformační odezva poddajného tělesa na zatížení musela být pokaždé přímo měřena. Zjednodušeně řečeno, mechanika kontinua vytváří rámec ve kterém postačí změřit geometrii a parametry materiálu, vše ostatní již popíší její rovnice vycházející z hlubokých fyzikálních principů rovnováhy a kontinuity.

<sup>27</sup>Extenzivní a intenzivní veličiny tvoří logické páry vyjadřující celkovou hodnotu v systému a její rozložení. Například extenzivní hmotnost je svázána s intenzivní hustotou, která reprezentuje její rozložení v tělese. Hmotnost je objemovým integrálem hustoty. Extenzivní tahová vnitřní síla v průřezu tyče je plošným integrálem tahového napětí. Extenzivní relativní posuv dvou průřezů tyče je křivkovým integrálem intenzivního poměrného prodloužení.

<sup>28</sup>Závislost na termodynamickém stavu tělesa a na jeho historii je možno v mechanických úlohách chápat jako implicitní, tedy vtělenou do konkrétních parametrů daného modelu materiálu.



hmotnost, kterou soustřeďuje do jednoho uzlu. Parametrem pružiny je tuhost, která popisuje vlastnosti elementu, aniž by byl explicitně zadán materiál nebo geometrie pružiny. Tyto elementy se vymykají chápání MKP jako metody pro diskretizaci kontinua. Přesně by se v případě jejich využití nemělo mluvit o konečných prvcích, ale o prvcích strukturálních nebo konstrukčních<sup>29</sup>. Z inženýrského hlediska je jejich praktický význam nesporný. Umožňují do modelů implementovat prvky, jejichž vlastnosti se snadno měří (např. tuhost pružiny), musejí se analyzovat jinými prostředky nežli MKP (např. tlumící vlastnosti kapalinových tlumičů) nebo je dodává výrobce (tuhosti hltičů vibrací, tzv. „silentbloků“). To umožňuje věnovat pozornost podstatným částem modelu a neplýtvat časem na modelování známých věcí. Implementace těchto elementů do programů, které jsme si zvykli nazývat konečně-prvkovými vede k tomu, že se běžně označují jako konečné prvky.

### 2.5.2 Třídění podle dimensionalit úlohy.

Úlohy mechaniky poddajných těles mohou být formulovány jako jedno dimenzionální (1D), dvojdimenzionální (2D, rovinné) a trojdimenzionální (3D, prostorové). Dimenzionalita úlohy neznamená přesně totéž, co dimenzionalita tělesa. Například geometrii skořepiny lze v určitém kontextu chápat jako dvojdimenzionální, ale úloha o deformaci skořepiny je trojdimenzionální. Nejde totiž jen o to, kolika nezávislými souřadnicemi se popíše poloha v tělese, ale i o to, v kolikarozměrném prostoru jsou definovány (kolik nezávislých složek mají) vektory posuvů a sil, tenzory napjatosti a deformace a další veličiny. Z tohoto hlediska bývají v programech MKP obvykle implementovány úlohy

1. **rovinné**
2. **rotačně symetrické**
3. **prostorové**

#### Rovinné úlohy.

Rovinná formulace efektivně popisuje plochá tělesa symetrická podle roviny, která dobře splňují následující předpoklady. Nechť je rovina symetrie souřadnicovou rovinou  $xy$  kartézského souřadnicového systému  $Oxyz$ :

- Posuvy částic, které leží na společné normále k rovině symetrie, jsou ve složkách rovnoběžných s rovinou symetrie stejné.
- Normálová složka posuvu v rovině symetrie je nulová  $u_z = 0$  a mimo ní je jednoznačně určena kontrakcí materiálu.
- Vektorové pole vnější objemové síly  $\mathbf{f}^B(x, y)$  nezávisí na souřadnici  $z$  a má nulové normálové složky  $f_z^B(x, y) = 0$ .
- Plošná síla  $\mathbf{f}^S(x, y)$  může být realizována pouze na okraji tělesa. Nezávisí na souřadnici  $z$  a má nulové normálové složky  $f_z^S(x, y) = 0$ .

<sup>29</sup>V anglosaské literatuře bývají někdy označovány termínem *structural element*.

- Složky tenzorů napjatosti a deformace  $\sigma_{zx} = 0$ ,  $\varepsilon_{zx} = 0$ ,  $\sigma_{zy} = 0$ ,  $\varepsilon_{zy} = 0$ . Pro složky  $\sigma_{zz}$  a  $\varepsilon_{zz}$  platí vztahy vyplývající z konstitutivních rovnic. V případě lineární pružnosti rozlišujeme tzv. **rovinnou napjatost**

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \varepsilon_{zz} = -\mu (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

a **rovinnou deformaci**

$$\varepsilon_{zz} = 0, \quad \sigma_{zz} = -\frac{\mu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) .$$

Typickými elementy použitelnými v rovinné formulaci jsou klasické kontinuální rovinné elementy (viz kap. ??) se zobecněnými uzlovými posuvy, resp. silami  $u_x$ ,  $u_y$ , resp.  $F_x$ ,  $F_y$  a nosníkové elementy pro rovinný ohyb, u kterých je navíc natočení, resp. moment  $\theta_z$ , resp.  $M_z$ .

**Poznámka 2.3:** V minulosti byla úspora parametrů úlohy velmi významná a rovinná formulace byla často jedinou možností, jak výpočet vůbec realizovat. V současnosti u běžných statických výpočtů nemusí být mohutnost úlohy rozhodující a z hlediska uživatelů je mnohdy pohodlnější použít 3D formulaci i tam, kde jsou podmínky rovinné úlohy dostatečně splněny. Například v situaci, kdy existuje geometrický model importovatelný do preprocesoru MKP, je pohodlnější akceptovat trojrozměrný výpočet. Nároky na výpočtový čas mohou být na výkonném počítači zvýšeny např. o sekundy, nároky na úpravu geometrického modelu mohou představovat hodinu práce kvalifikovaného člověka.

Rovinná formulace se dnes využívá tam, kde je potřeba provádět rozsáhlé série výpočtů, zvládat řadu iterací u nelineárních úloh nebo velký počet časových inkrementů v dynamice. Typickými situacemi jsou citlivostní studie a optimalizační úlohy (viz studii vlivu geometrie lamely komutátoru na pevnost a deformaci v kap.??). Jinou typickou aplikací je modelování nestabilního nebo únavového šíření trhlin, zejména z důvodů komplikací při přesítování v okolí čela trhliny. •

### Rotačně symetrické úlohy.

Rotačně symetrická formulace, jak naznačuje název, efektivně popisuje rotačně symetrická tělesa. Za předpokladu rotačně symetrické geometrie a silových i kinematických okrajových podmínek je rotačně symetrická i odezva tělesa, tedy pole posuvů, deformace i napjatosti. Nechť je osou rotační symetrie souřadnicová osa  $y$  kartézského souřadnicového systému  $Oxyz$ . Nechť cylindrický souřadnicový systém  $Or\phi y$  je asociován k  $Oxyz$  sdíleným počátkem  $O$ , společnou osou  $y$  a tím, že úhel  $\phi$  je měřen od osy  $x$  a orientován k záporné poloose  $z$ <sup>30</sup>. Z důvodů rotační symetrie musí kromě nezávislosti všech fyzikálních polí na tangenciální souřadnici  $\phi$  být

- nulová tangenciální složka posuvu  $u_\phi(r, y) = 0$
- nulové složky tenzoru deformace – zkosení  $\varepsilon_{r\phi}(r, y) = 0$ ,  $\varepsilon_{y\phi}(r, y) = 0$  a napjatosti – smyky  $\sigma_{r\phi}(r, y) = 0$ ,  $\sigma_{y\phi}(r, y) = 0$

<sup>30</sup>Tato poněkud „krkolonná“ definice cylindrických souřadnic pro rotačně-symetrickou úlohu je v obecných MKP programech typická. Důvodem je formální shoda s rovinnou úlohou v systému  $Oxy$ .

Navíc obvodová složka tenzoru deformace je vyjádřena vztahem

$$\varepsilon_{\phi\phi}(r, y) = \frac{u_r(r, y)}{r},$$

zatímco pro ostatní složky platí formálně Cauchyho vztahy

$$\varepsilon_{rr}(r, y) = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{yy}(r, y) = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{ry}(r, y) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial y} \right).$$

Je zřejmé, že rotačně–symetrickou úlohu lze řešit stejnými elementy jako úlohu rovinnou s tím, že k deformační energii, resp. uzlovým vnitřním silám přispívá navíc obvodová složka tenzoru deformace a napjatosti. Pole posuvů, deformace a napjatosti se řeší ve vybrané meridianové rovině – rovina  $xy$  – a do prostoru se (obvykle myšleně) expanduje rotací.

Typickými elementy použitelnými v rotačně–symetrické formulaci jsou klasické kontinuální rotačně–symetrické elementy (viz kap. ??) se zobecněnými uzlovými posuvy, resp. silami  $u_r = u_x, u_y$ , resp.  $F_r = F_x, F_y$  a rotačně symetrické skořepinové elementy, u kterých je navíc natočení, resp. moment  $\theta_\phi = \theta_z$ , resp.  $M_z$ . Je třeba podotknout, že rotačně symetrická formulace stejně jako rovinná úloha snižuje dimenzi modelu o 1. Dvojměrné kontinuální elementy modelují tělesa ve 3D Cauchyovském kontinuu, jednorozměrné ohybové elementy modelují skořepinu. Pro užití rotačně–symetrických elementů platí poznámka 2.3

**Poznámka 2.4:** Uzlové síly v rotačně symetrické úloze reprezentují liniová zatížení  $f^L$  [ $\text{N m}^{-1}$ ] podél rovnoběžkových kružnic. V různých programech se mohou vyskytnout různé interpretace uzlové síly. Například do uzlu rotačně–symetrické úlohy se zadává skutečná liniová síla  $F_r = f_r^L$ . Nebo integrální hodnota<sup>31</sup>

$$F_y = \int_0^{2\pi} f_y r d\phi.$$

•

**Poznámka 2.5:** S využitím Fourierova rozvoje je možno řešit úlohu s rotačně symetrickou geometrií, ale s nesymetrickým zatížením pomocí klasických rotačně symetrických prvků. Distribuce zatížení je v obvodovém směru přibližně nahrazena částí Fourierova rozvoje a řešením série rotačně symetrických úloh se získají koeficienty Fourierova rozvoje hledaných funkcí posuvu a napjatosti. Z důvodů rozebraných v poznámce 2.3 se tento přístup dnes běžně neaplikuje. Ve specifických studiích by však jeho revokace mohla být přínosem.

•

### Prostorové úlohy.

Prostorová (3D) formulace je v rámci modelování těles *Cauchyovským* kontinuem zcela obecná. Jak geometrie těles, tak jejich pohyb nepodléhají žádným podmínkám. Typickými elementy jsou klasické kontinuální prostorové elementy (viz kap. ??) se zobecněnými uzlovými posuvy, resp. silami  $u_x, u_y, u_z$  resp.  $F_x, F_y, F_z$ , skořepinové, resp. membránové elementy pro modelování konstrukcí plošného charakteru s výrazným ohybovým namáháním, resp. s převažujícím membránovým namáháním. Skořepinové elementy mají navíc

<sup>31</sup>V dnes již nevyvíjeném MKP systému *TPS 10* byla zadávána uzlová síla jako integrální účinek liniové síly na dráze odpovídající jednomu úhlovému stupni  $F_y = \int_0^{\pi/180} f_y r d\phi$ .

další zobecněné uzlové posuvy, resp. síly – natočení  $\theta_x \theta_y \theta_z$ , resp. momenty  $M_x M_y M_z$ . Prostorové nosníkové, resp. tyčové elementy modelují konstrukce křivkového charakteru namáhané kombinací tah–tlaku, ohybu a krutu, resp. pouze tah–tlakem. U nosníkových elementů přibývají jako u skořepin další zobecněné uzlové posuvy – natočení  $\theta_x \theta_y \theta_z$  a zobecněné uzlové síly – momenty  $M_x M_y M_z$ . V případech s významnou krutovou deplanační se užívají formulace s přidáním amplitudou deplanační funkce – sedmým zobecněným uzlovým posuvem – a s energeticky konjugovanou uzlovou silou – bimomentem.

**Poznámka 2.6:** V anglosaské literatuře bývají nosníkové elementy označovány jako *beam* elementy. Postihují namáhání tah–tlakem, ohybem a krutem, zatímco v češtině se termínem nosník označuje těleso namáhané ohybem. Z tohoto hlediska by bylo přesnější pojmenovat tyto elementy např. *rámové*, přesto je v česky psané literatuře běžné pojmenování nosníkový prvek. •

### 2.5.3 Třídění podle dimensionalit elementů.

Pojem dimensionalit elementů není totožný s pojmem dimensionalit úlohy. Má smysl pouze u elementů, které diskretizují kontinuum. Jednoduše řečeno je dimenzionalita elementu rovna počtu nezávislých zobecněných souřadnic, ve kterých se provádí integrace matice tuhosti a ekvivalentních uzlových sil. Ve skutečnosti všechny elementy v kontinuu reprezentují trojrozměrná tělesa. Některá tělesa však mají speciální geometrii, která umožňuje zjednodušit jejich model v kontinuu. Na nejobecnější úrovni jsou to tělesa plošné a liniové geometrie. Obě tyto speciální geometrie lze definovat konstruktivně. Snížení dimenze se docílí přijetím předpokladů o deformaci. Tak je možno aproximovat průběhy pole posuvů ve směru redukované souřadnice analyticky pomocí veličin, které jsou funkcí neredukovaných souřadnic.

Plošná neboli 2D tělesa jsou vyjadřována pomocí definiční (obvykle střednicové) plochy  $\Omega$  a tloušťkové funkce  $t(\xi, \eta)$  (viz obr. 2.2). Poloha bodu  $\mathbf{X}_\Omega$  na definiční ploše je popsána pomocí dvou souřadnic  $\mathbf{X}_\Omega = \mathbf{X}_\Omega(\xi, \eta)$ . V každém bodě střednicové plochy je definován jednotkový normálový vektor<sup>32</sup>  $\mathbf{n}^0 = \mathbf{n}^0(\xi, \eta)$ . Plošné těleso je geometrickým místem bodů

$$\left\{ \mathbf{X} \in \mathcal{R}^3 : \mathbf{X} = \mathbf{X}_\Omega(\xi, \eta) + k \cdot t(\xi, \eta) \cdot \mathbf{n}^0(\xi, \eta), \text{ kde } \mathbf{X}_\Omega \in \Omega, k \in \left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle \right\}.$$

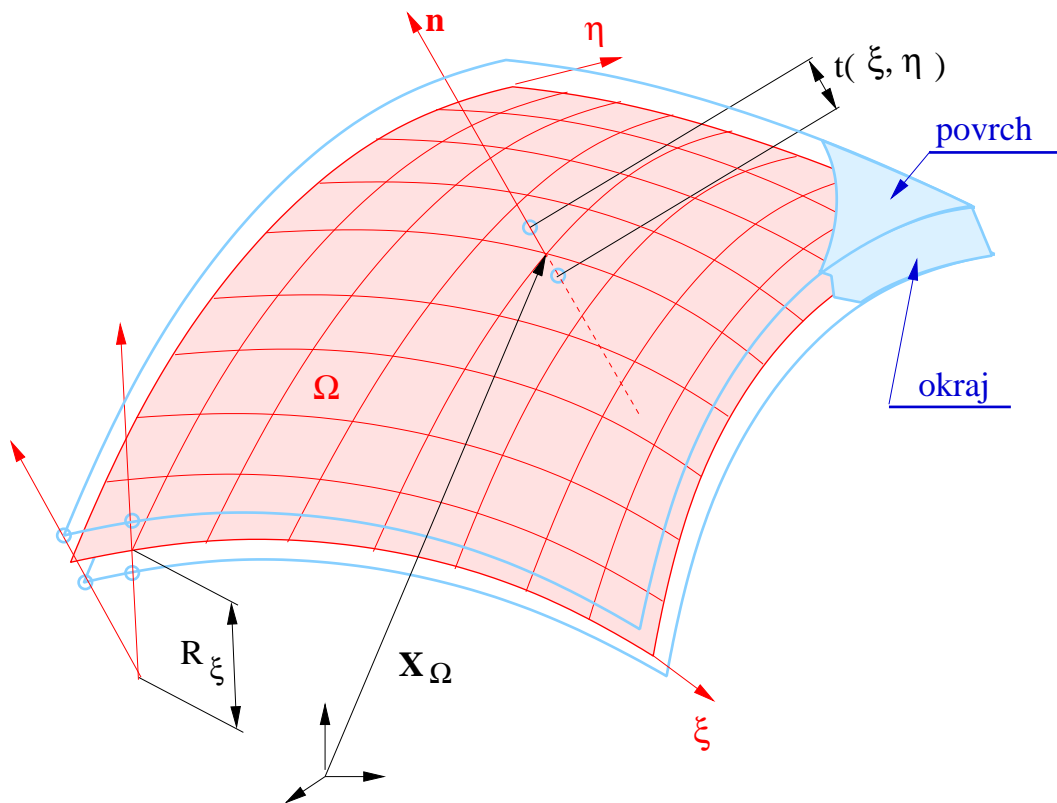
Okrajem plošného tělesa se rozumí množina bodů ležící na normálách procházejících hranicí oblasti  $\Omega - \partial\Omega$ , tedy

$$\left\{ \mathbf{X} \in \mathcal{R}^3 : \mathbf{X} = \mathbf{X}_\Omega(\xi, \eta) + k \cdot t(\xi, \eta) \cdot \mathbf{n}^0(\xi, \eta), \text{ kde } \mathbf{X}_\Omega \in \partial\Omega, k \in \left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle \right\}$$

a povrchem (vnějším, resp. vnitřním) množinu bodů, které leží nejdále (ze všech bodů na společné normále) od střednicové plochy ve směru, resp. proti směru normály, tedy

$$\left\{ \mathbf{X} \in \mathcal{R}^3 : \mathbf{X} = \mathbf{X}_\Omega(\xi, \eta) \pm \frac{t(\xi, \eta)}{2} \cdot \mathbf{n}^0(\xi, \eta), \text{ kde } \mathbf{X}_\Omega \in \Omega \right\}.$$

<sup>32</sup>To vyžaduje hladkost střednicové plochy. V MKP diskretizaci je: 1) u rovinných úloh a nezakřivených skořepin hladkost zaručena; 2) u zakřivených skořepin hladkost na rozhraní elementů obvykle požadována jako jedna z podmínek konvergence sítě. Modelování ostrých rohů tyto podmínky porušuje v linii, tedy na množině míry nula, což se připouští.



Obrázek 2.2: Definice plošného tělesa

Z obrázku 2.2 je také zřejmé, že uvedená definice plošného tělesa je limitována geometricky. Pokud by byl poloměr zakřivení definiční plochy v libovolném směru  $R_\xi$  příliš malý<sup>33</sup>, došlo by k porušení jednoznačnosti při popisu polohy obecného bodu  $\mathbf{X}$  kontinua. Jeden a tentýž bod by mohl být vyjádřen pomocí více bodů na střednici

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_\Omega(\xi_1, \eta_1) + k_1 \cdot t(\xi_1, \eta_1) \cdot \mathbf{n}^0(\xi_1, \eta_1) = \mathbf{X}_\Omega(\xi_2, \eta_2) + k_2 \cdot t(\xi_2, \eta_2) \cdot \mathbf{n}^0(\xi_2, \eta_2).$$

Dvě různé částice kontinua (v Lagrangeovském popisu) se vyskytují ve stejném bodě prostoru, což je porušení principu neprostupnosti. Obvykle je tloušťka plošného tělesa omezena podstatně více, s ohledem na zjednodušující předpoklady při semianalytickém popisu pole posuvů. Omezení se pohybují v rozmezí<sup>34</sup>

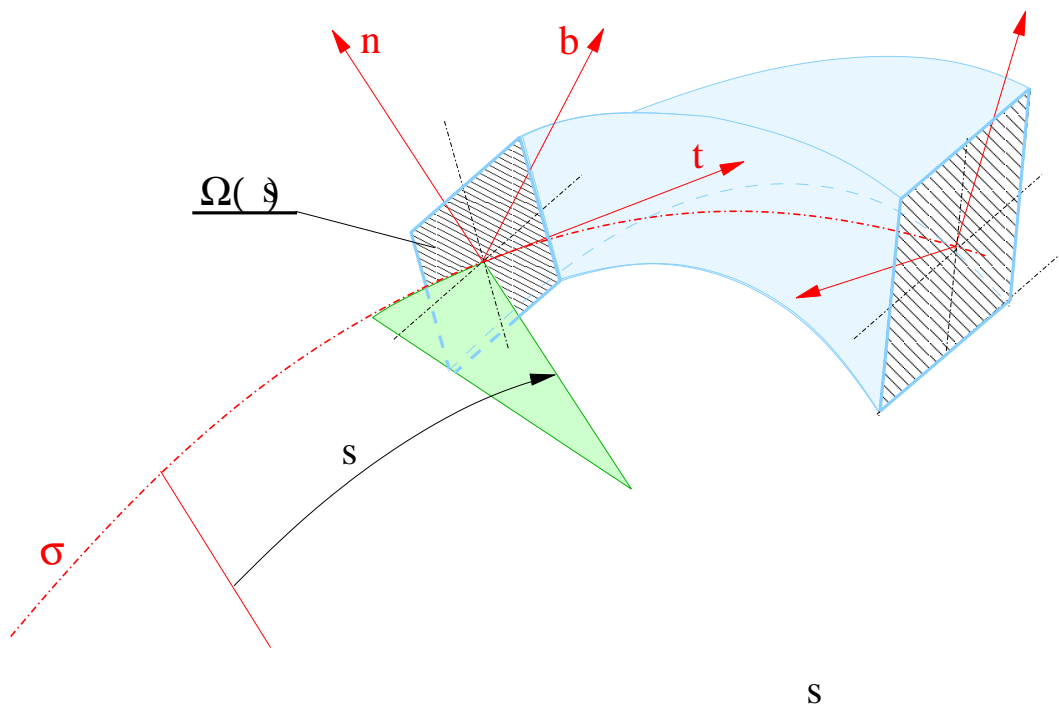
$$t(\xi, \eta) \leq (0,05 \div 0,1) R_{min}.$$

Liniová neboli 1D tělesa jsou vyjadřována pomocí definiční (střednicové<sup>35</sup>) křivky  $\sigma$  s jedinou zobecněnou křivočarou souřadnicí  $s$ . Poloha bodu  $\mathbf{X}_\sigma$  na definiční křivce je

<sup>33</sup>V případě, že definiční plochou je střednice, nesmí být nejmenší poloměr její křivosti menší nežli 1/2 tloušťky.

<sup>34</sup>V případě, že střednicová plocha není zakřivená, vztahuje se maximální tloušťka na velikost definiční oblasti  $\Omega$ .

<sup>35</sup>Definice pojmu střednice je v případě liniové geometrie problematičtější nežli u geometrie plošné. Je otázka, zda má procházet těžišti průřezů, středisky smyku a pod. Proto je pojem definiční křivka výstižnější a pojem střednice chápeme v tomto smyslu.



Obrázek 2.3: Definice liniového tělesa

popsána pomocí jediné souřadnice  $\mathbf{X}_\sigma = \mathbf{X}_\sigma(s)$ . S výjimkou „nezakřivených“ částí křivky lze v každém bodě jednoznačně definovat **tečnu** (např. jednotkovým tečným vektorem  $\mathbf{t}^0(s)$ ), **normálu** jako kolmici k tečně v oskulační rovině (např. jednotkovým vektorem  $\mathbf{n}^0(s)$ ) a **binormálu**, která je kolmá současně k tečně i normále (např. jednotkovým vektorem  $\mathbf{b}^0(s)$ ), jako na obrázku 2.3. Liniové těleso je geometrickým místem bodů

$$\left\{ \mathbf{X} \in \mathcal{R}^3 : \mathbf{X} = \mathbf{X}_\sigma(s) + \nu \cdot \mathbf{n}^0(s) + \beta \cdot \mathbf{b}^0(s), \text{ kde } \mathbf{X}_\sigma \in \sigma, f_{i,\Omega(s)}(\nu, \beta) \leq 0 \right\}.$$

Nerovnice  $f_{i,\Omega(s)}(\nu, \beta) \leq 0$  pro  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  určují v každém bodě  $\mathbf{X}_\sigma(s)$  definiční křivky oblast  $\Omega(s)$  nazývanou **průřez** tělesa<sup>36</sup>. Ze stejných důvodů jako u plošných těles omezuje zakřivení tloušťku, je u těles liniových omezena křivostí velikost průřezu. Není-li definiční křivka zakřivená, není jednoznačně definována normála a binormála.

<sup>36</sup>Například kruhový průřez o poloměru  $r$  je definován jedinou nerovnicí

$$f_{1,\Omega(s)}(\nu, \beta) = \nu^2 + \beta^2 - r^2 \leq 0.$$

Čtvercový průřez o straně  $a$  vyžaduje současné splnění dvou nerovnic s absolutní hodnotou

$$\begin{aligned} f_{1,\Omega(s)}(\nu, \beta) &= |\nu| - \frac{a}{2} \leq 0 \\ f_{2,\Omega(s)}(\nu, \beta) &= |\beta| - \frac{a}{2} \leq 0. \end{aligned}$$

## 2.5.4 Třídění podle typu.

Klasifikace podle typu představuje implementaci přístupů klasické technické mechaniky do MKP. Technická mechanika poddajných těles se zabývá tělesy typických tvarů a způsobů zatížení a uložení, které umožňují formulovat vhodné předpoklady zjednodušující systém rovnic matematické teorie pružnosti. V některých případech vede zjednodušení přímo k nalezení analytického řešení (tah–tlak), někdy se sníží dimenze kontinua (rotační symetrie, desky, skořepiny).

- **Kontinuální elementy**<sup>37</sup>. Diskretizují Cauchyovské kontinuum. Typická je pro ně shoda dimensionalit úlohy a dimensionalit elementu. Implementovány bývají často pro prostorové (3D) a rovinné (2D) úlohy, řídce pro 1D úlohy<sup>38</sup>. Uzlovými parametry jsou obvykle složky vektoru posuvu ve dvou, resp. troj–rozměrném prostoru.
- **Skořepinové elementy**<sup>39</sup>. Diskretizují plošná tělesa (viz kapitolu 2.5.3 na str. 28) namáhaná ohybem i membránově a vycházejí z Kirchhoffových nebo Mindlinových předpokladů. Uzlovými parametry jsou složky posuvu a natočení, někdy bývají implementovány varianty pouze s uzlovými posuvy.
- **Nosníkové elementy**<sup>40</sup>. Diskretizují liniová tělesa (viz kapitolu 2.5.3 na str. 30) namáhaná ohybem, tah–tlakem a krutem a vycházejí z Bernoulliových nebo Mindlinových/Timoshenkových formulací. Uzlovými parametry jsou složky posuvu a natočení, pokud je implementováno stísněné kroucení, přidává se deplanační parametr.
- **Membránové elementy**. Diskretizují plošná tělesa (viz kapitolu 2.5.3 na str. 28) která nemají ohybovou, ale pouze membránovou tuhost. Uzlovými parametry jsou pouze složky posuvu. Vzhledem k tomu, že jsou uzly volně pohyblivé ve směru kolmém na střednici, nemohou být membránové elementy aplikovány v lineárním výpočtu, ale pouze tehdy, je-li rovnováha hledána ve zdeformovaném stavu.
- **Liniové membránové elementy**<sup>41</sup>. Diskretizují liniová tělesa (viz kapitolu 2.5.3 na str. 30) která nemají ohybovou a torzní, ale pouze membránovou tuhost. Uzlovými parametry jsou pouze složky posuvu. Vzhledem k tomu, že jsou uzly volně pohyblivé ve směru kolmém na střednici, nemohou být liniové membránové elementy běžně aplikovány v lineárním výpočtu, ale pouze tehdy, je-li rovnováha hledána ve zdeformovaném stavu. Výjimkou jsou elementy typu *tyč*.
- **Tyčové elementy**<sup>42</sup>. Jde v podstatě o liniové membránové elementy se dvěma uzly, které přenášejí pouze tah–tlak. Pokud takový element spojuje dvě části mechanického systému, může být použit i v úloze lineární, protože má 0 stupňů volnosti. V takovém případě nemodeluje jednorozměrné membránové kontinuum bez ohybové tuhosti, ale tyč s neomezenou kritickou silou ve vzpěru. Vzhledem k absenci rotací

---

<sup>37</sup>Někdy označované jako *solid*, 3D

<sup>38</sup>V případě jednorozměrných úloh je mnohem efektivnější metoda přenosových matic, takže 1D prvky nebývají implementovány.

<sup>39</sup>Někdy označované jako *shell*, ve stavařské terminologii *stěno–deskové prvky*.

<sup>40</sup>Někdy označované jako *beam*.

<sup>41</sup>Někdy označované jako *truss*.

<sup>42</sup>Někdy označované jako *link*.

v uzlech nemůže dojít k ohybovému zatížení, takže ohybové vlastnosti nemusí být v prvku formulovány<sup>43</sup>.

- **Hmoty**<sup>44</sup>. Představují hmotu, resp. setrvačný moment soustředěnou do jediného uzlu, který má vektor posuvu, resp. rotace. Hmoty, která je ve výše zmíněných typech elementu stanovena z hustoty asociovaného materiálu, se zadává přímo. Typickými aplikacemi jsou zjednodušené modely agregátů, přístrojů, připojených hmot v dynamických analýzách.
- **Pružiny**<sup>45</sup>. Představují silovou, resp. momentovou vazbu mezi relativními posuvy, resp. rotacemi dvou uzlů nebo uzlu a rámu. Vlastnosti vazby nejsou vyjadřovány na základě asociovaného materiálu, ale jsou přiřazeny přímo, buď jako tuhost nebo, u nelineárních pružin, jako závislost síla–relativní posuv.
- **Tlumiče**<sup>46</sup>. Představují silovou, resp. momentovou vazbu mezi relativními rychlostmi, resp. úhlovými rychlostmi dvou uzlů nebo uzlu a rámu. Vlastnosti vazby nejsou vyjadřovány na základě asociovaného materiálu, ale jsou přiřazeny přímo, buď jako tlumení nebo, u nelineárních tlumičů, jako závislost síla–relativní rychlost. Typickými aplikacemi jsou modely tlumičů v dynamických analýzách, ale také je lze využít jako umělý stabilizační prvek, který účinkuje jako regularizátor úlohy např. při simulacích hroucení konstrukcí.

### 2.5.5 Třídění podle formulace.

Formulací rozumíme vnitřní konstrukci elementu–předpoklady o deformaci, druh a stupeň interpolace, formulaci operátorů (konzistentní a nekonzistentní matice tuhosti, hmotnosti), aplikovatelná zatížení (objemové, plošné a liniové síly, teplota . . . ). Formulace elementu se projevuje:

- Vymezením fyzikálních jevů, které element popisuje. Například ve strojírenských analýzách mohou být modelovány čistě mechanické jevy, jevy související s termodynamickými procesy–teplotní napjatost, vedení tepla, vedení elektrického proudu v tělesech a piezoelektrický jev a další.
- Předpoklady a zjednodušení. Například skořepinové, resp. nosníkové prvky mohou být formulovány jako tlusté nebo tenké, t.j. podle Mindlinovy, resp. Timoshenkovy nebo Kirchhoffovy, resp. Bernoulliovy hypotézy. „Tlusté“ formulace uvažují (být velmi zjednodušeně) příčná smyková napětí, zatímco „tenké“ ne. Prvky mohou být navrženy pro homogenní materiály nebo pro například materiály vrstvené, jako lamináty či sendviče.
- Formulací interpolačních funkcí, což souvisí s počtem uzlů, zobecněnými uzlovými

<sup>43</sup>Pokud by propojení oněch dvou částí bylo modelováno více za sebou řazenými tyčovými prvky, budou vnitřní uzly volně pohyblivé ve směru kolmém na střednici. Elementy nemodelují tyč, ale liniové membránové kontinuum–ohybové dokonale měkké vlákno, lano, pás, řemen . . .

<sup>44</sup>Někdy označované jako *mass*.

<sup>45</sup>Někdy označované jako *spring*.

<sup>46</sup>Někdy označované jako *dashpot*.



kinematickými a silovými<sup>47</sup> parametry i počtem uzlů. Např. 3D kontinuální element–šestistěn má minimálně 8 uzlů v rozích, isoparametrické formulace připouštějí na libovolných hranách přidat středostranný uzel až do 20 uzlů, případně mohou být uzly ve středech stěn – do 26 uzlů, a přidá-li se uzel ve středu elementu, dostaneme isoparametrický element s úplnou polynomicou interpolací posuvů druhého stupně o 27 uzlech.

3D, resp. 2D kontinuální prvky mají obvykle tři, resp. dva uzlové parametry – složky posuvů uzlu. Uzly skořepinových elementů mají 6 stupňů volnosti–složky posuvu i rotace, existují ale i skořepinové elementy, které mají v uzlech jenom posuvy, a zakřivení hran je řízeno středostrannými uzly. Takzvané *p–elementy* mají v uzlech vyšší počet obecných parametrů, které představují hodnoty interpolovaných posuvů a jejich derivací a jejichž kinematická či silová interpretace je obtížná. Tyto prvky umožňují volit stupeň interpolačního polynomu a tím i kvalitu interpolace beze změny MKP sítě.

Při analýze těles z „téměř“ nestlačitelných materiálů se u 3D prvků projeví numerická singularita způsobená nejednoznačností relace mezi kulovými tenzory napjatosti a deformace. Tomu lze předejít tzv. hybridní formulací – zavedením kulového tenzoru napjatosti, resp. hydrostatického tlaku, mezi zobecněné parametry (posuvy). Typickými příklady využití prvků s hybridní formulací jsou modely komponent z pryže, nebo modely s vysokou mírou plastizace<sup>48</sup>.

- Způsobem integrace a charakterem výsledných elementových operátorů (matic tuhosti, tlumení a hmotnosti a ekvivalentních zatížení). Typicky matice tlumení může být aproximována jako tzv. proporcionální tak, že ji lze vyjádřit lineární kombinací

$$\underline{C} = \alpha \underline{M} + \beta \underline{K}$$

matice hmotnosti a matice tuhosti, což se využívá při modální analýze. V případě explicitní integrace pohybových rovnic se s výhodou využívá tzv. *nekonzistentní* matice hmotnosti, která je diagonální.

- Zobecněnými uzlovými posuvy a silami.

### 2.5.6 Třídění podle topologie.

Elementy, které diskretizují kontinuum se obvykle navrhuje v topologických modifikacích. Tvar konečného elementu bývá co nejjednodušší, vesměs jde o jednoduché otevřené křivky v 1D kontinuu, (křivočaré) trojúhelníky a čtyřúhelníky ve 2D kontinuu a (křivočaré) čtyřstěny, pětistěny a šestistěny ve 3D kontinuu. Pojmem topologie elementu se v MKP obvykle míní vzájemný vztah mezi uzly na jedné straně a vrcholy, hranami a stěnami elementu na straně druhé. Uzly bývají vždy umístovány do vrcholů, často na hrany, řidčeji na stěny a výjimečně i do objemu elementu. Topologie elementu má úzkou vazbu

<sup>47</sup>Kinematické a silové parametry mají uzly v problémech mechaniky, analogicky např. ve vedení tepla jsou uzlové teploty a soustředěné teplotní toky

<sup>48</sup>Většina teorií plasticity považuje poměrnou objemovou změnu plastické části tenzoru deformace za nulovou, což odpovídá experimentálním poznatkům o plasticitě kovů. Proto ve stavu, kdy je podíl plastické deformace dominantní, chová se materiál prakticky jako nestlačitelný.

na formulaci. V rámci daného kontinua jsou elementy různých topologií a formulací sdružovány do tzv. *rodin* ve kterých se vyskytují variace v topologii. Jsou-li elementy z jedné rodiny použity v společně v jedné síti, pak při splnění podmínek topologické spojitosti<sup>49</sup> je síť spojitá jak geometricky (tedy v nedeformovaném stavu), tak i po deformaci. **Při korektní kombinaci elementů z jedné rodiny je zajištěna kompatibilita posuvů v dané síti.** Typicky v dvojrozměrných geometriích (rovinné úlohy a skořepiny) jsou dvě topologické variace – trojúhelník a čtyřúhelník. V prostoru pak šestistěn, pětistěn–pyramida, pětistěn–prizma, čtyřstěn.

## 2.6 Klasifikace okrajových podmínek a vazbových rovnic.

Základním kritériem rozdělení okrajových podmínek je, zda je po jejich diskretizaci předepsána uzlová hodnota, která je hledána jako řešení, nebo uzlová hodnota zobecněného zatížení. V mechanice poddajných těles se podle tohoto klíče dělí okrajové podmínky na **kinematické** a **silové**<sup>50</sup>. V úloze vedení tepla jsou neznámou uzlové teploty, zatímco zatížení představují koncentrované uzlové tepelné toky.

### 2.6.1 Lineární a nelineární kinematické okrajové podmínky.

Je-li pohyb uzlu fixován k bodu, přímce či rovině, jde o lineární kinematickou okrajovou podmínku<sup>51</sup>. Má-li být pohyb fixován ke křivce, jde o vazbu nelineární<sup>52</sup>. Vazbovou rovnicí v MKP je míněna závislost

$$f(u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}) = 0, \quad \text{kde } i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_k \in 1, 2, \dots, n_{DOF}$$

mezi složkami uzlových posuvů. Je-li funkce  $f$  lineární, lze ji zapsat např. ve tvaru

$$a_0 + a_1 \Delta u_{i_1} + a_2 \Delta u_{i_2} + \dots + a_k \Delta u_{i_k} = 0.$$

Nelineární rovnice může být linearizována s využitím Taylorova rozvoje

$$f(u_{i_1,0}, u_{i_2,0}, \dots, u_{i_k,0}) + \frac{\partial f}{\partial u_{i_1}} \Delta u_{i_1} + \frac{\partial f}{\partial u_{i_2}} \Delta u_{i_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_{i_k}} \Delta u_{i_k} = 0$$

a využita při výpočtu lineárního odhadu vektoru posuvů  $\Delta \vec{u}_0$ . V obou případech musí být (lineární, resp. linearizovaná) vazbová rovnice začleněna do systému lineárních, resp. linearizovaných rovnic rovnováhy

$$\underline{K} \Delta \vec{u} = \Delta \vec{F}.$$

<sup>49</sup>Topologická spojitost předpokládá, že mají-li sousední elementy průnik dimenze  $n$ , pak je tímto průnikem vždy celá hraniční entita dimenze  $n$ . Jednoduše, elementy buď sdílí celou stěnu, nebo nemají průnik dimenze 2; buď sdílí celou hranu, nebo nemají průnik dimenze 1. Pokud sdílí hranu, sdílí zároveň i uzly této hrany. Pokud sdílí stěnu, sdílí její hrany a pokud existují i středostěnné uzly.

<sup>50</sup>V naprosté většině případů aplikace MKP na mechanické systémy vychází formulace z takzvané deformační varianty, ve které se jako řešení po diskretizaci hledají posuvy

<sup>51</sup>která se projeví lineární vazbou mezi neznámými posuvy daného uzlu

<sup>52</sup>Vazbová rovnice je nelineární a v případě jinak lineárního modelu dostaneme soustavu lineárních a jedné nelineární rovnice.

Klasickou metodou je využít vazbovou rovnici k eliminaci vybrané složky posuvu ze soustavy. Každá vazbová rovnice představuje možnost vyjádřit vybranou složku posuvu pomocí ostatních. Po úpravách matice tuhosti  $\underline{K}$  lze podobně jako u implementace kinematických vazeb vypustit řádek a sloupec odpovídající vybrané složce posuvu a tu pak dopočítat přímo z vazbové rovnice. Nevýhodou tohoto přístupu je, že libovolná složka posuvu může být eliminována nejvýše jednou. Při implementaci komplikovanějších vazeb do modelu je velmi obtížné tento požadavek dodržet.

Jinou možností je „přidat“ vazbovou rovnici k rovnicím rovnováhy. To je ovšem možno pouze tehdy, pokud se přidá i další proměnná – Lagrangeův multiplikátor – fyzikálně představující reakci ve vazbě.

V MKP programech jsou obvykle implementovány lineární vazbové rovnice plně ve správě uživatele. Nelineární vazby bývají předprogramovány a tvoří omezenou množinu typů vazeb. Např. vazbu *slider*, která definuje polohu jednoho uzlu na spojnici dvou jiných uzlů v libovolné konfiguraci. Tyto vazby se někdy nazývají jako MPC (multi-point constrains)<sup>53</sup>.

## 2.6.2 Silové okrajové podmínky.

Silové účinky účinky mohou být

- **distribuované**

- **Objemové**–silové účinky jsou spojitě rozloženy v objemu

$$\mathcal{F}^B = \frac{d\mathbf{F}}{dV},$$

kde  $d\mathbf{F}$  je diferenciální silový účinek na diferenciál objemu  $dV$ . Jde o účinky silových polí (např. gravitačního, magnetického ...) nebo setrvačné účinky.

- **Plošné**–silové účinky jsou spojitě rozloženy po povrchu

$$\mathcal{F}^S = \frac{d\mathbf{F}}{dS},$$

kde  $d\mathbf{F}$  je diferenciální silový účinek na diferenciál plochy  $dS$ . Jde o účinky při dotyku pevných těles, případně interakce pevného tělesa s médiem.

- **Liniové**–silové účinky jsou rozloženy podél křivky

$$\mathcal{F}^L = \frac{d\mathbf{F}}{ds},$$

kde  $d\mathbf{F}$  je diferenciální silový účinek na diferenciál délky křivky  $ds$ . V běžných MKP programech se liniové síly definují prakticky výhradně pro zatěžování 2D těles a nosníků.

- **Soustředěné**–síly (resp. dvojice) jsou aplikovány přímo v uzlech. MKP diskretizace převádí všechny silové účinky na ekvivalentní zobecněné uzlové síly. Tato transformace je jednoznačná a podstatou ekvivalence je rovnost potenciálů distribuovaných a ekvivalentních uzlových sil. Úloha najít k daným uzlovým silám síly distribuované má řešení, ale to není jednoznačné. Nicméně každou soustavu uzlových sil v MKP lze interpretovat jako nějaké distribuované zatížení, ke kterému je ona soustava ekvivalentní. Proto o uzlových silách v MKP nemluvíme jako o singulárních.

<sup>53</sup>Terminologie v MKP programech je velmi nejednotná.

## 2.7 Klasifikace konstitutivních modelů.

Konstitutivní modely, které popisují vztah mezi silovým působením a deformační odezvou materiálu na lokální úrovni, jsou fenomenologické. Lokální mírou silového působení je tenzor napjatosti  $\sigma$  a lokální mírou deformační odezvy tenzor deformace  $\epsilon$ . Úkolem konstitutivního modelu je na základě hypotéz určit vztah mezi tenzory napjatosti a deformace na základě standardních materiálových zkoušek. Konstitutivní model je dán konstitutivními rovnicemi. Obecný tvar těchto rovnic může být velmi komplikovaný, protože chování materiálu nemusí záviset pouze na mechanických veličinách, ale také na termodynamice celého procesu a na vlivu okolí<sup>54</sup>. Zejména z tohoto důvodu existuje řada dílčích (zjednodušených) konstitutivních modelů, které jsou navrženy a ověřeny pro konkrétní skupiny materiálů a konkrétní provozní a zatěžovací podmínky. Tyto modely bývají implementovány v MKP programech a výpočtář musí být schopen z dané nabídky volit model co nejvhodnější pro konkrétní úlohu.

### 2.7.1 Elastické a inelastické konstitutivní modely.

- **Elastické modely.** Elastické materiály jsou schopny veškerou energii vloženou do nich při mechanickém deformování vrátit ve formě mechanické práce, jinými slovy, nedisipují energii. K odezvě dochází okamžitě, není závislá na čase. Tato idealizace neplatí nikdy úplně, ale u mnoha materiálů při odpovídajícím charakteru zatěžování je v dobré korespondenci s realitou. Příklady jsou
  - **Lineárně elastická odezva** - nejjednodušší, čistě lineární vztah mezi napětím a deformací. Model je platný pouze v oboru malých hodnot deformací, kdy lze jako míru deformace použít tenzor malých deformací.
  - **Hyperelastická** vychází z formulace elastického potenciálu. Konstitutivní model vhodný pro modelování téměř nestlačitelných materiálů, např. pryží. Model je platný v oboru velkých deformací
- **Inelastické modely** disipují část vložené deformační práce na teplo. Protože tato část deformační práce nemůže být vrácena, musí po odlehčení zůstat materiál přetvořen o tzv. trvalou deformaci.
  - Nejvýznamnějšími inelastickými konstitutivními modely jsou modely **elasticko-plastické**, v nichž část deformace je elastická (po odlehčení se vrátí), část je trvalá a k odezvě dochází okamžitě. Ty jsou založeny na představě, že trvalá deformace roste, pokud napjatost dosáhne plochy plasticity. Typickými materiály, pro které jsou vhodné elasticko-plastické konstitutivní modely jsou kovy a slitiny v podmínkách vyšších zatížení. V programech MKP je implementována řada elasticko-plastických konstitutivních vztahů vhodných pro modely s monotónním zatěžováním (elastoplastické materiály s isotropním zpevněním), pro modelování cyklických dějů, modelování časově závislých procesů (visko-plasticita, creep).
  - U konstitutivních modelů **viskoelastických** je inelastická složka odezvy závislá na čase. Viskoelastický model se typicky používá pro více zatížené plasty.

<sup>54</sup>Např. chemické vlivy nebo radiace mohou ovlivnit vlastnosti materiálu.

- **Viskoplastické** materiálové modely mají obvykle elastickou složku (deformace vratná), plastickou složku (deformace nevratná, okamžitá) i viskózní složku (deformace nevratná, závislá na čase). Modely jsou typické pro řešení creepu.

### 2.7.2 Isotropní a anisotropní konstitutivní modely.

Isotropní materiál je takový, jehož odezva nezávisí na orientaci. Vlastnosti vzorků–tyček vyříznutých z izotropního materiálu v různých orientacích jsou stejné. Isotropní konstitutivní modely popisují isotropní materiály a jejich rovnice musí být invariantní vůči rotaci materiálových souřadných systémů.

Při aplikaci anisotropních konstitutivních modelů záleží odezva na orientaci materiálových souřadných systémů. Anisotropie se může týkat různých typů odezvy: nejrozšířenější jsou anizotropní elastické konstitutivní modely, které popisují typicky kompozitové konstrukce. Také anizotropní plasticita a viskoplasticita bývá implementována v MKP programech, např. jako Hillův model s elipsoidní plochou plasticity<sup>55</sup>.

### 2.7.3 Konstitutivní modely závislé na historii zatěžování.

Vlastnosti všech materiálů jsou závislé na historii. I nezatížené materiály stárnou–probíhají v nich procesy podmíněné různými vlivy, které mění strukturu a tím i vlastnosti. Samovolné stárnutí nebývá v MKP programech obvykle implementováno, protože k němu dochází na velmi dlouhých časových škálách vzhledem k trvání modelovaných dějů. Změny vlastností materiálu vyvolané zatěžováním bývají implementovány pomocí speciálních stavových parametrů. Typickými parametry jsou např. poloměr a posunutí středu plochy plasticity u klasických elasticko–plastických materiálů nebo objemový podíl „děr“<sup>56</sup>.

---

<sup>55</sup>Ocelové konstrukce bývají často vyráběny technologiemi, které vnášejí anizotropii do struktury a tím i do vlastností materiálu.

<sup>56</sup>V angličtině se používá termín *void*, který označuje mikrotrhlinu v modelech uvažujících porézní strukturu.