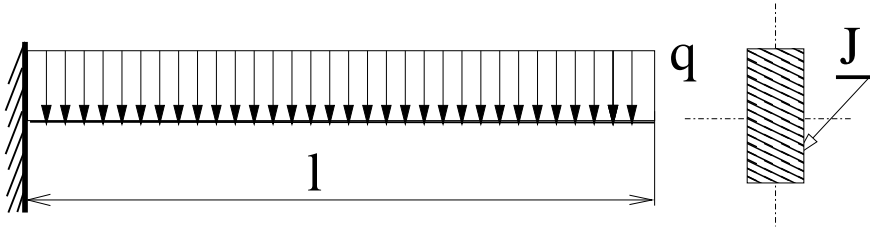


Každý test obsahuje jeden příklad podobný níže uvedeným typovým příkladům a několik otázek vybraných z níže uvedených testových otázek. Za příklad je možno získat maximálně 5 bodů, celkový počet bodů z testu je 25.

1 Typové příklady.

1. Určete přibližně průhybovou čáru vx nosníku zatíženého spojitým zatížením q [N mm^{-1}]. Rozměry a průřezové charakteristiky jsou zavedeny na obr. 0.1, materiál je elastický s Youngovým modulem pružnosti E . Užijte princip minima celkové potenciální energie a Ritzovu metodu s polynomicou bází do stupně polynomu 4.



Obr. 0.1: Nosník se spojitým zatížením.

Řešení: Předpokládejme vx jako lineární kombinaci Taylorovské báze

$$vx = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

Hledáme koeficienty a_i tak, abychom vyhověli principu minima celkové potenciální energie. Podle tohoto principu se řešení vybírá z množiny kinematically přípustných posuvů. Proto splnění kinematických okrajových podmínek musí být předem zajištěno i ve výše navržené lineární kombinaci pro libovolnou volbu koeficientů.

Kinematické okrajové podmínky: $v_0 = 0$, $v'_0 = v/x|_{x=0} = 0$. Je evidentní, že volba $a_0 = a_1 = 0$ zaručí splnění kinematických okrajových podmínek pro libovolnou volbu a_2, a_3, a_4 . Nyní tedy máme kinematically přípustná řešení ve tvaru

$$vx = a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

s derivacemi

$$\begin{aligned} v'x &= 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 \\ v''x &= 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 \end{aligned}$$

Celková potenciální energie Π tělesa sestává z deformační energie U a potenciálu vnější síly W

$$\Pi = U + W, \text{ kde}$$

$$\begin{aligned} U &= \int_0^l \frac{M_o^2}{2EJ} x = \frac{EJ}{2} \int_0^l (v''x)^2 x \\ W &= - \int_0^l qvx \end{aligned}$$

Nyní, z

$$(v''x)^2 = (2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2)^2 = 144a_4^2x^4 + 36a_3^2x^2 + 4a_2^2 + 48a_4a_2x^2 + 24a_3a_2x + 144a_4a_3x^3$$

plyne

$$\Pi = \frac{72}{5}EJl^5a_4^2 + 6EJl^3a_3^2 + 2EJla_2^2 + 18EJl^4a_4a_3 + 24EJl^3a_4a_2 + 6EJl^2a_3a_2 - \frac{ql^5}{5}a_4 - \frac{ql^4}{4}a_3 - \frac{ql^3}{3}a_2 \cdot$$

Podmínkou minima Π_{a_2, a_3, a_4} je

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} &= 24EJl^3a_4 + 6EJl^2a_3 + 4EJla_2 - \frac{ql^3}{3} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial a_3} &= 18EJl^4a_4 + 12EJl^3a_3 + 6EJl^2a_2 - \frac{ql^4}{4} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial a_4} &= \frac{144}{5}EJl^5a_4 + 18EJl^4a_3 + 24EJl^3a_2 - \frac{ql^5}{5} = 0 \end{aligned}$$

systém obyčejných lineárních rovnic, jehož řešení

$$a_4 = \frac{q}{24EJ}; \quad a_3 = \frac{-ql}{6EJ}; \quad a_2 = \frac{ql^2}{4EJ}$$

vede na přibližné řešení naší úlohy ve tvaru

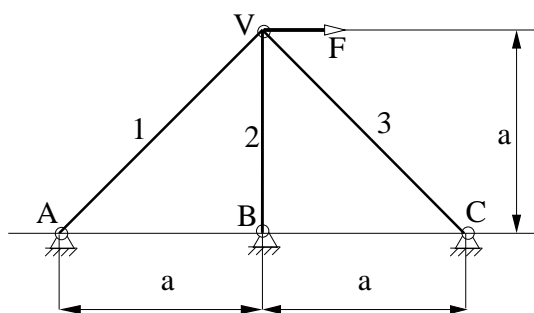
$$vx = \frac{q}{24EJ} [x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2] .$$

Průhyb na volném konci

$$vl = \frac{ql^4}{8EJ}$$

je v plném souladu s klasickým analytickým řešením Mohrovým integrálám.

2. Určete přibližně posuv (horizontální i vertikální) styčnicku V prutové soustavy. Rozměry jsou zavedeny na obr. 0.2, materiál je elastický s Youngovým modulem pružnosti E a všechny pruty mají stejný průřez A . Užijte princip minima celkové potenciální energie a předpoklad malých posuvů.



Obr. 0.2: Jednoduchá prutová soustava.

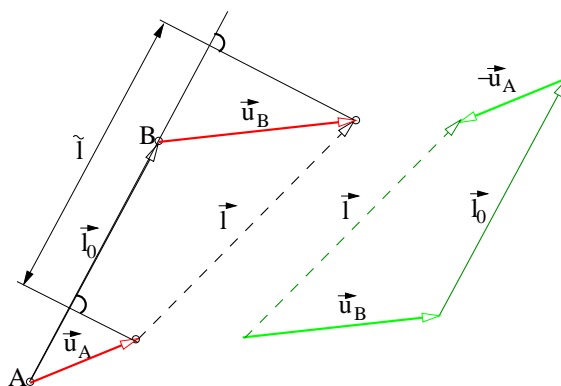
Řešení: Celkovou potenciální energii prutové soustavy vyjádříme jako součet deformační energie U a potenciálu vnějších sil W , tedy $\Pi = U + W$. Deformační energii lze vyjádřit jako součet deformačních energií jednotlivých prutů

$$U = \sum_{i=1}^3 U_i = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{1}{2} E \varepsilon_i^2 A l_i \right] ,$$

kde l_i je délka a ε_i poměrné prodloužení i – tého prutu. Potenciál vnějších sil je formálně záporně vzatou hodnotou skalárního součinu síly a posuvu jejího působíště. V našem případě tedy jde o styčnick V a protože síla je horizontální platí, že

$$W = -u_V F ,$$

kde posuv \vec{u}_V styčnicku V je ve složkách $\vec{u}_V = [u_V, v_V]$. Poměrné prodloužení prutu evidentně závisí na posuvu



Obr. 0.3: Prodloužení prutu jako funkce posuvů jeho styčnicků za předpokladu malých posuvů.

jeho koncových bodů (styčnicků). Dle obrázku 0.3 znázorníme nedeformovaný prut s počátečním styčnickem A a koncovým styčnickem B vektorem \vec{l}_0 a prut po deformaci vektorem \vec{l} . Za předpokladu malých posuvů se délka prutu po deformaci \tilde{l} aproximuje jako velikost průmětu deformovaného prutu do původního směru

$$\tilde{l} = \frac{\vec{l}_0}{|\vec{l}_0|} \cdot \vec{l}.$$

Označíme-li \vec{u}_A , resp. \vec{u}_B posuvy styčnicků A , resp. B , pak podle vektorového obrazce na obr. 0.3 platí

$$\vec{l} = \vec{u}_B + \vec{l}_0 - \vec{u}_A.$$

Prodloužení prutu (za předpokladu malých posuvů) vyjádříme jako rozdíl délek \tilde{l} po deformaci a $|\vec{l}_0|$ před deformací, takže prodloužení prutu

$$\Delta l = \tilde{l} - |\vec{l}_0| = \frac{\vec{l}_0}{|\vec{l}_0|} \cdot \vec{l} - \frac{|\vec{l}_0|^2}{|\vec{l}_0|} = \frac{\vec{l}_0 \cdot \vec{l} - \vec{l}_0 \cdot \vec{l}_0}{|\vec{l}_0|} = \frac{(\vec{l} - \vec{l}_0) \cdot \vec{l}_0}{|\vec{l}_0|} = \frac{(\vec{u}_B - \vec{u}_A) \cdot \vec{l}_0}{|\vec{l}_0|}$$

je dáno průmětem rozdílu posuvů jeho styčnicků do směru prutu před deformací. Evidentně i poměrné prodloužení prutu

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{|\vec{l}_0|} = \frac{(\vec{u}_B - \vec{u}_A) \cdot \vec{l}_0}{|\vec{l}_0|^2}$$

je lineární funkcí posuvů styčnicků A a B . Celková potenciální energie naší soustavy

$$\Pi(u_A, v_A, u_B, v_B, u_C, v_C, u_V, v_V) = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{1}{2} E \varepsilon_i^2 A l_i \right] - u_V F$$

je (kvadratickou) funkcí posuvů styčnicků A , B , C a V . Podle principu minima celkové potenciální energie je řešením takový posuv, který minimalizuje celkovou potenciální energii Π na množině všech kinematicky přípustných posuvů, tedy v našem případě při splnění okrajových podmínek

$$u_A = v_A = u_B = v_B = u_C = v_C = 0.$$

Za těchto podmínek platí

$$\Pi(u_V, v_V) = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{1}{2} E \varepsilon_i^2 A l_i \right] - u_V F,$$

kde

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{u_V a + v_V a}{2a^2} & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial u_V} &= \frac{1}{2a} & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial v_V} &= \frac{1}{2a} \\ \varepsilon_2 &= \frac{v_V a}{a^2} & \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial u_V} &= 0 & \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial v_V} &= \frac{1}{a} \\ \varepsilon_3 &= \frac{-u_V a + v_V a}{2a^2} & \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial u_V} &= -\frac{1}{2a} & \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial v_V} &= \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

Nutnou podmínkou minima celkové potenciální energie Π je

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial u_V} &= \sum_{i=1}^3 \left[E \varepsilon_i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial u_V} A l_i \right] - F = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial v_V} &= \sum_{i=1}^3 \left[E \varepsilon_i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial v_V} A l_i \right] = 0 \end{aligned}$$

což po dosazení vede na soustavu

$$\begin{aligned} EA \left[\frac{u_V + v_V}{2a} \frac{1}{2a} \sqrt{2} a + \frac{v_V}{a} 0 a + \frac{-u_V + v_V}{2a} \left(-\frac{1}{2a} \right) \sqrt{2} a \right] - F &= 0 \\ EA \left[\frac{u_V + v_V}{2a} \frac{1}{2a} \sqrt{2} a + \frac{v_V}{a} \frac{1}{a} a + \frac{-u_V + v_V}{2a} \left(\frac{1}{2a} \right) \sqrt{2} a \right] &= 0 \end{aligned}$$

s řešením

$$\begin{aligned} u_V &= \frac{\sqrt{2}Fa}{EA} \\ v_V &= 0 \end{aligned}$$

Toto řešení je opět v souladu s „klasickým“ řešením silovou metodou s deformační podmínkou nebo pomocí 2. Castiglianovy věty.

2 Testové otázky.

1. Jaký varianční princip představuje následující rovnice?

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_{\Omega} X_i \delta u_i dV - \int_{\partial\Omega_\sigma} p_i \delta u_i dS = 0$$

Co představují symboly $(\Omega, \partial\Omega_\sigma, \sigma_{ij}, \delta \varepsilon_{ij}, X_i, \delta u_i, p_i)$ v ní zapsané? Zformulujte příslušný variační princip! (Nápověda: Nezapomeňte na pojem *kinematicky přípustného pole posuvů*).

4 body

2. Co představuje symbol Π , a v jakém variančním principu se využívá?

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \int_{\Omega} X_i u_i dV - \int_{\partial\Omega_\sigma} p_i u_i dS$$

Co představují symboly $\Omega, \partial\Omega_\sigma, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, X_i, u_i, p_i$? Zformulujte příslušný variační princip! (Nápověda: Nezapomeňte na pojem *kinematicky přípustného pole posuvů*).

4 body

3. Celkovou potenciální energii lze zapsat ve tvaru

$$\Pi = U - W$$

Co představují symboly U a W . Doplňte vztahy pro jejich vyjádření

$$U = \square \int_{\Omega} \square \square dV$$

$$W = \int_{\Omega} \square \square dV + \int_{\partial\Omega_\sigma} \square \square dS$$

a popište význam použitých symbolů. Zformulujte příslušný variační princip! (Nápověda: Nezapomeňte na pojem *kinematicky přípustného pole posuvů*).

4 body

4. Odvoďte proces sestavení globální matice tuhosti \underline{K} z matic tuhosti jednotlivých elementů \underline{K}^e s využitím definičních vztahů pro deformační energii. (Nápověda: $U = \sum_e U^e$, $U = \frac{1}{2} \bar{\Delta}^T \cdot \underline{K} \cdot \bar{\Delta}$, $U^e = \frac{1}{2} \bar{\delta}^{eT} \cdot \underline{K}^e \cdot \bar{\delta}^e$. Využijte matic tuhosti elementu \underline{K}^e o stejném rozměru, jako je rozměr globální matice tuhosti.)

4 body

5. Vysvětlete zavedení kinematických okrajových podmínek (modifikaci soustavy $\underline{K} \cdot \bar{\Delta} = \bar{F}$) do MKP modelu. (Nápověda: výjděte z faktu, že kinematická okrajová podmínka snižuje počet neznámých posuvů a využijte symetrii matice tuhosti. Pojednejte i případ, kdy je vynucen nenulový posuv!)

4 body

6. Zapište vztah pro celkovou potenciální energii Π MKP modelu s pomocí globální matice tuhosti $\underline{\mathbf{K}}$, globálního vektoru uzlových posuvů $\vec{\Delta}$ a globálního vektoru vnějších uzlových sil \vec{F} . Odvoďte a s pomocí týchž symbolů zapište soustavu rovnic, které reprezentují nutnou podmínku extrému (minima) celkové potenciální energie a tím podmínku rovnováhy MKP modelu.

4 body

7. Odvoďte, jak se v MKP modelu (v rovinné úloze) projeví zatížení tělesa teplotním polem $T(x, y)$. (Nápověda:
- (a) Pomocí teplotního rozdílu ΔT a teplotní roztažnosti α definujte za předpokladu isotropního materiálu tenzor počáteční deformace $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$. Vyjádřete i jeho vektorovou reprezentaci $\vec{\varepsilon}_0$
- (b) Upravte Hookeův zákon ve vektorové reprezentaci $\vec{\sigma} = \underline{\mathbf{E}} \cdot \vec{\varepsilon}$ tak, aby respektoval počáteční deformaci.
- (c) Pro takto upravený Hookeův zákon modifikujte výraz pro celkovou potenciální energii MKP modelu

$$\sum_e \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \vec{\varepsilon}^T \cdot \vec{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega_e} \vec{u}^T \cdot \vec{X} d\Omega - \int_{\Gamma_{e,\sigma}} \vec{u}^T \cdot \vec{p} d\Gamma \right] =$$

$$\sum_e \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \vec{\varepsilon}^T \cdot \underline{\mathbf{E}} \cdot \vec{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega_e} \vec{u}^T \cdot \vec{X} d\Omega - \int_{\Gamma_{e,\sigma}} \vec{u}^T \cdot \vec{p} d\Gamma \right] =$$

$$\sum_e \left\{ \frac{1}{2} \vec{\delta}^T \cdot \left[\int_{\Omega_e} \underline{\mathbf{B}}^T \cdot \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{B}} d\Omega \right] \cdot \vec{\delta} - \vec{\delta}^T \cdot \int_{\Omega_e} \underline{\mathbf{N}}^T \cdot \vec{X} d\Omega - \vec{\delta}^T \cdot \int_{\Gamma_{e,\sigma}} \underline{\mathbf{N}}^T \cdot \vec{p} d\Gamma \right\} =$$

$$\sum_e \left\{ \frac{1}{2} \vec{\delta}^T \cdot \underline{\mathbf{K}}^e \cdot \vec{\delta} - \vec{\delta}^T \cdot \vec{F}_{ekv.,obj.}^e - \vec{\delta}^T \cdot \vec{F}_{ekv.,povrch}^e \right\}$$

- (d) Nový člen interpretujte jako ekvivalentní uzlovou sílu.

4 body

8. Uveďte definiční vztah (z čeho na co operuje) matice tvarových funkcí $\underline{\mathbf{N}}(x, y, z)$. (Nápověda: Analogicky platí, že matice tuhosti elementu $\underline{\mathbf{K}}^e$ je definována vztahem $U = \frac{1}{2} \vec{\delta}^T \cdot \underline{\mathbf{K}}^e \cdot \vec{\delta}$)

2 body

9. Uveďte definiční vztah (z čeho na co operuje) $\vec{\delta}$ - $\vec{\varepsilon}$ operátor (operátor z uzlových posuvů na deformace) $\underline{\mathbf{B}}(x, y, z)$. (Nápověda: Analogicky platí, že matice tuhosti elementu $\underline{\mathbf{K}}^e$ je definována vztahem $U = \frac{1}{2} \vec{\delta}^T \cdot \underline{\mathbf{K}}^e \cdot \vec{\delta}$)

2 body

10. Uveďte definiční vztah (z čeho na co operuje) matice tuhosti elementu $\underline{\mathbf{K}}$. (Nápověda: Analogicky je matice tvarových funkcí $\underline{\mathbf{N}}$ definována vztahem $\vec{u}(x, y, z) = \underline{\mathbf{N}}(x, y, z) \cdot \vec{\delta}$)

2 body

11. Na příkladu jednorozměrného (tyčového elementu) vysvětlíte pojem *matice tvarových funkcí* – $\underline{\mathbf{N}}(x, y, z)$.

3 body

12. Vyjmenujte obecné vlastnosti matice tuhosti elementu $\underline{\mathbf{K}}^e$. Alespoň jednu z nich dokažte!

3 body

13. Popište proces vyhlazení napjatosti prostřednictvím interpolace v uzlech.

3 body

14. Vysvětlete na příkladu 1D tyčového elementu pojem *ekvivalentní uzlová síla*. (Nápověda: popište čemu je ekvivalentní a v jakém smyslu.)

3 body

15. Vysvětlete pojem invariančnosti konečného elementu. Jak se invariančnost zajišťuje? (Invariantní polynomy, invariantní zobrazení prototypu např. isoparametrického elementu).

3 body

16. Vysvětlete pojem isotropie konečného elementu. (Návod: Navrhněte a popište testování isotropie rotací elementu v předdefinovaném poli posuvů).

3 body

17. Vysvětlete pojem numerické integrace. (Návod: Využijte příklad Newton–Cotesovské integrace funkce dané nad intervalem $\langle a; b \rangle$ hodnotami v bodech a , b a $(a + b)/2$. Ukažte, že odvozené schéma odpovídá Simpsonově pravidlu.)

3 body

18. Doplňte do tabulky měrné vnitřní síly (ohybové, membránové a posouvající) definované pro desky a skořepiny. Označte symbolem „+“, resp. „-“, zda se vnitřní síla uplatní, resp. neuplatní u Kirchhoffových či Mindlinových desek a skořepin. Uveďte jednotky.

Vnitřní síla	Symbol	desky		skořepiny		jednotky
		Kirchhoff	Mindlin	Kirchhoff	Mindlin	
Měrný ohybový moment	M_x	+	+	+	+	N
	M_y					
	M_{xy}					
	N_x					
	N_y					
	N_{xy}					
	T_{yz}					
	T_{xz}					

3 body

19. Doplňte do tabulky vnitřní síly (ohybové, osově, torzní a posouvající) definované pro nosníkové (beam) elementy a tyčové (link) elementy. Označte symbolem „+“, resp. „-“, zda se vnitřní síla uplatní, resp. neuplatní u Bernoulliových či Mindlinových nosníkových (beam) elementů. Uveďte jednotky. (Osa x je podélnou osou nosníku.)

Vnitřní síla	Symbol	nosníkové elementy		tyče	jednotky
		Bernoulli/Kirchhoff	Mindlin		
Ohybový moment	M_y	+	+	-	Nm
	M_z				
	M_x				
	N				
	T_y				
	T_z				

3 body

20. Naznačte odvození (vektoru uzlových posuvů, vektoru uzlových sil a matice tuhosti) skořepinového elementu typu *Flat* propojením deskového a rovinného čtyřúhelníkového elementu. Co se rozumí pojmem *šestý stupeň volnosti*?

21. Zapište vztah pro deformační energii desky, znáte-li vektor zobecněné napjatosti

$$\vec{\sigma} = [M_x, M_y, M_{xy}]^T,$$

vektor zobecněné deformace

$$\vec{\varepsilon} = \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^T$$

a matici zobecněných materiálových konstant

$$\underline{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} D & \mu D & 0 \\ \mu D & D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} D \end{bmatrix}.$$

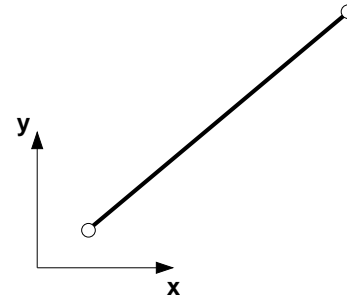
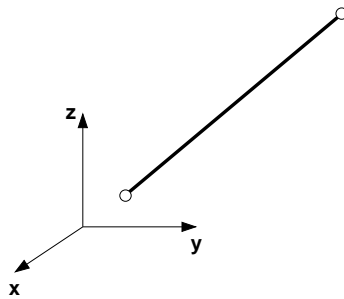
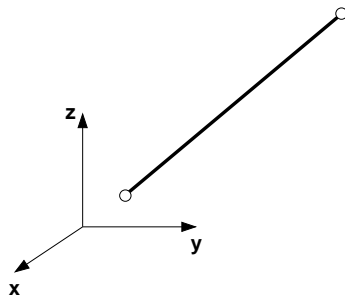
2 body

22. Naznačte zobecněné posuvy a síly v uzlech elementu

Tyčového (3D)

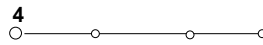
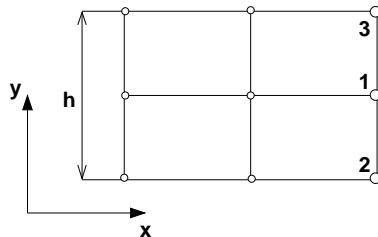
Nosníkového (3D)

Nosníkového (2D)



2 body

23. Navrhněte vazbové rovnice pro propojení částí modelu nosníku



4 body

24. Je dána tabulka souřadnic uzlů

uzel	1	2	3	4	5	6	7	8
x [mm]	0	10	0	10	0	10	20	20
y [mm]	20	20	10	10	0	0	10	0

tabulka elementů (incidence uzlů)

lok. uzel	1	2	3	4
element				
1 (4-uzlový rovinný)	1	2	4	3
2 (4-uzlový rovinný)	3	4	6	5
3 (4-uzlový rovinný)	4	7	8	6

a tabulka incidence globálních stupňů volnosti

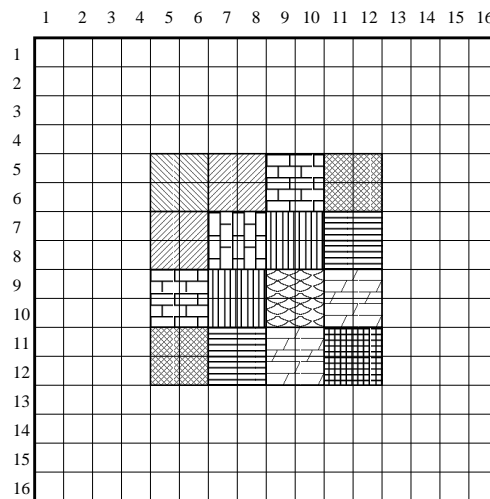
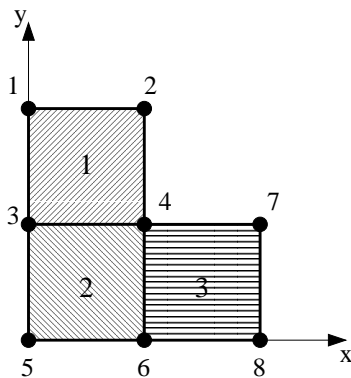
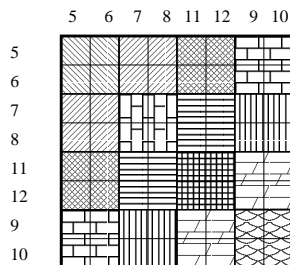
uzel	1	2	3	4	5	6	7	8
u_x [mm]	1	3	5	7	9	11	13	15
u_y [mm]	2	4	6	8	10	12	14	16

rovinné MKP síť.

- (a) Načrtněte uvedenou síť v globálním souřadném systému (Oxy), očísľujte v ní uzly a elementy!
- (b) Naznačte rozmístění prvků matice tuhosti elementu č. 2 (\underline{K}^2) v globální matici tuhosti \underline{K}

2 body

Výsledek:



25. Je dána tabulka souřadnic

uzel	1	2	3	4	5	6	7	8
x [mm]	-20	-20	-10	0	10	20	20	0
y [mm]	0	10	20	20	20	10	0	0

tabulka elementů

lok. uzel	1	2	3	4
element				
1 (3-uzlový rovinný)	1	2	8	-
2 (3-uzlový rovinný)	2	3	8	-
3 (3-uzlový rovinný)	3	4	8	-
4 (3-uzlový rovinný)	4	5	8	-
5 (3-uzlový rovinný)	5	6	8	-
6 (3-uzlový rovinný)	6	7	8	-

a tabulka incidence globálních stupňů volnosti

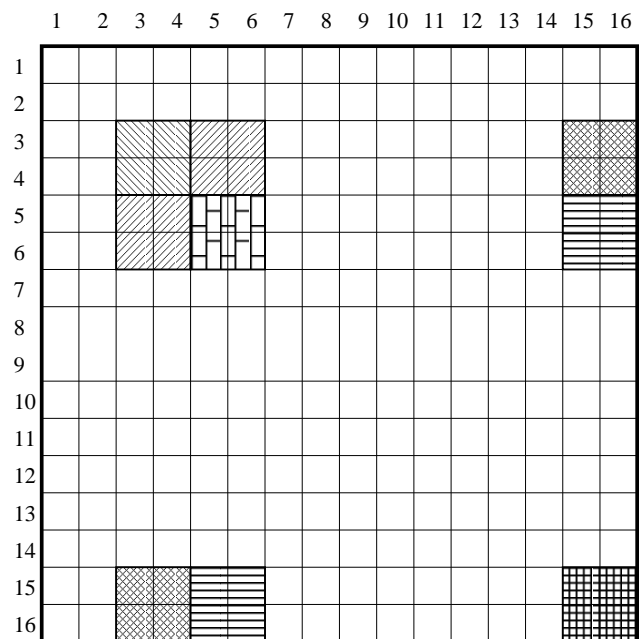
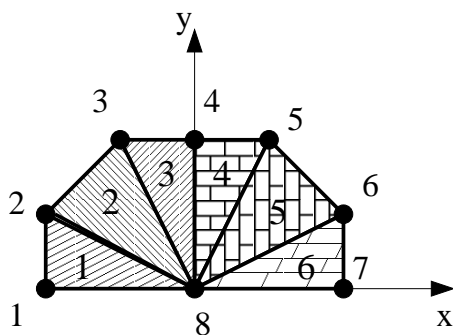
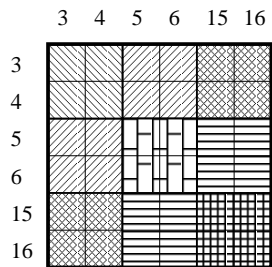
uzel	1	2	3	4	5	6	7	8
u_x [mm]	1	3	5	7	9	11	13	15
u_y [mm]	2	4	6	8	10	12	14	16

rovinné MKP síť.

- (a) Načrtněte uvedenou síť v globálním souřadném systému (Oxy), očísujte v ní uzly a elementy!
- (b) Naznačte rozmístění prvků matice tuhosti elementu č. 2 (\underline{K}^2) v globální matici tuhosti \underline{K}

2 body

Výsledek:



26. Je dána tabulka souřadnic

uzel	1	2	3	4	5
x [mm]	-10	0	10	0	0
y [mm]	0	10	0	-10	0

tabulka elementů

lok. uzel	1	2	3	4
element				
1 (3-uzlový rovinný)	1	2	5	-
2 (3-uzlový rovinný)	2	3	5	-
3 (3-uzlový rovinný)	3	4	5	-
4 (3-uzlový rovinný)	4	1	5	-

a tabulka incidence globálních stupňů volnosti

uzel	1	2	3	4	5
u_x [mm]	1	3	5	7	9
u_y [mm]	2	4	6	8	10

rovinné MKP síť.

- (a) Načrtněte uvedenou síť v globálním souřadném systému (Oxy), očísľujte v ní uzly a elementy!
- (b) Naznačte rozmístění prvků matice tuhosti elementu č. 2 (\underline{K}^2) v globální matici tuhosti \underline{K}

2 body

Výsledek:

